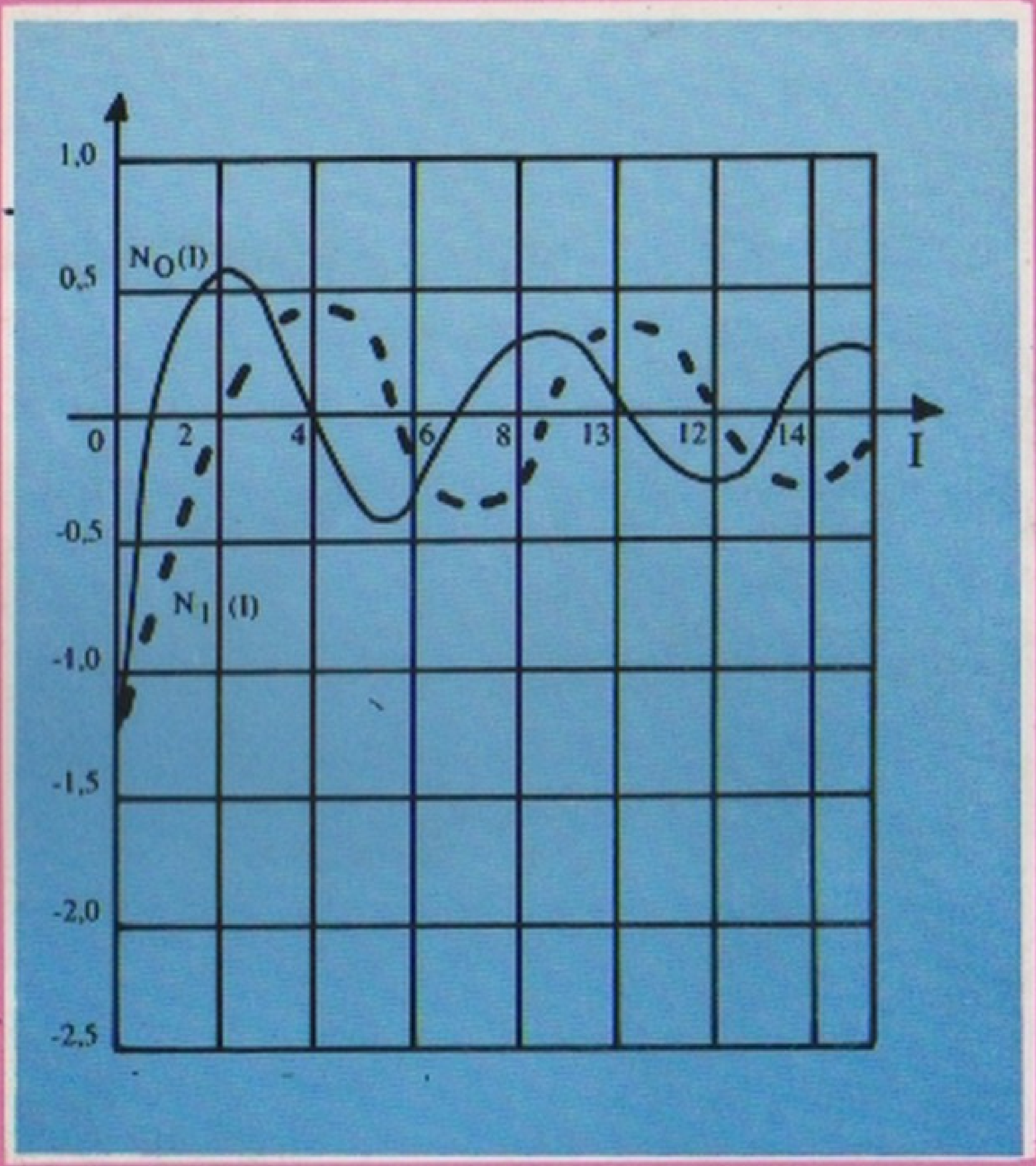
ECUACIONES DIFERENCIALES



APLICACIONES

5ta. EDICION

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

LIMA - PERU

S/ 20-00

ECUACIONES DIFERENCIALES

Y SUS APLICACIONES

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

LIMA - PERU

Impreso en el Perú
1996

5ta Edición

R.U.C.: 19369978
Registro Comercial Nro. 107116
Escritura Pública Nro. 4084
Ley de Derechos de Autor Nro. 13714

PROLOGO

Teniendo en cuenta que el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias es muy importante en la formación de los estudiantes de ciencias e ingeniería, debido a que con frecuencia aparecen en el estudio de los fenómenos naturales.

Esta obra que presento en su 5º Edición está orientada básicamente para todo estudiante de ciencias matemáticas, física, ingeniería, economía y para toda persona interesada en fundamentar sólidamente sus conocimientos matemáticos.

Esta 5º Edición está cuidadosamente corregida y comentada tanto en sus ejercicios y problemas resueltos y propuestos con sus respectivas respuestas. La teoría expuesta es precisa y necesaria para la solución de los diversos problemas abordados.

La lectura del presente libro requiere de un conocimiento del cálculo diferencial e integral; el libro empieza con un capítulo sobre los conceptos generales de las ecuaciones diferenciales, se continúa con diferentes métodos analíticos para resolver una ecuación diferencial de primer orden y primer grado, acompañado con algunas aplicaciones importantes, se abordan las ecuaciones diferenciales de orden n, homogéneas y no homogéneas con sus respectivas aplicaciones, también se estudia los operadores diferenciales; asimismo, se trata del sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes en diferentes métodos de solución, se ha incluido el capítulo de solución de las ecuaciones diferenciales por medio de series de potencias utilizando el teorema de FROBENIUS y en la última parte se considera algunas tablas como identidades trigonométricas e hipérbolas, sumatorias, logaritmos, ecuaciones cúbicas y cuarticas, derivadas e integrales.

Por último deseo agradecer y expresar mi aprecio a las siguientes personas por sus valiosas sugerencias y críticas.

Doctor Pedro Contreras Chamorro
Ex-Director de la Escuela Profesional de Matemática Pura de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Lic. Sergio Leyva Haro
Catedrático de la Universidad Nacional del Callao
Coordinador del Centro de Cómputo de la Facultad de Ingeniería Química.

Lic. Juan Bernui Barros
Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
Catedrático de la Universidad Nacional del Callao

Doctor Eugenio Cabanillas Lapa
Ex-Director de Post-Grado de la Facultad de Ciencias Matemáticas Pura de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
Catedrático de la Universidad Nacional del Callao.

Lic. Palermo Soto Soto
Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Catedrático de la Universidad Particular Ricardo Palma

Lic. Antonio Calderón Leandro
Jefe de Departamento Académico de Matemática de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas
Catedrático de la Universidad Particular Ricardo Palma

Eduardo Espinoza Ramos

DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos **RONALD y JORGE**, que Dios ilumine sus caminos para que puedan ser guías de sus prójimos.

INDICE

CAPITULO I

1. CONCEPTOS BASICOS Y TERMINOLOGIA

1.1. Introducción

En los cursos básicos el lector aprendió que, dada una función $y = f(x)$ su derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ es también una función de x; y que se calcula mediante alguna regla apropiada. El problema que enfrentamos en este curso, no es, dada una función $y = f(x)$ encontrar su derivada, más bien el problema es, si se da una ecuación como $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, encontrar de alguna manera una función $y = f(x)$ que satisfaga a la ecuación, en una palabra se desea resolver ecuaciones diferenciales.

1.2. Definición

Una ecuación diferencial es la que contiene derivadas o diferenciales de una función incógnita.

Ejemplos de Ecuaciones diferenciales:

1) $\frac{dy}{dx} = 4x + 7$ 2) $y^2dx - x^2dy = 0$

3) $m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - K\frac{dy}{dx}$ 4) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - \cos x\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x$

5) $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} = 0, \quad donde \quad w = f(x,y,z)$

6) $x^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} = 0, \quad donde \quad \omega = f(x,y,z)$

Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales:

Las ecuaciones diferenciales se clasifican en dos tipos:

Si la función incógnita depende de una sola variable independiente, en la cual sólo aparecen derivadas ordinarias, la ecuación diferencial se llama **´´Ecuación diferencial ordinaria´´**.

Ejemplos: Son ecuaciones diferenciales ordinarias las siguientes ecuaciones:

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$, *donde* $k = m\omega^2$ es una magnitud positiva, m la masa (Ecuación diferencial del movimiento armónico simple)

$(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + p(p+1)y = 0$ (Ecuación diferencial de Legendre)

$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0$ (Ecuación diferencial de Bessel)

$(x-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\dfrac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$ (Ecuación diferencial de Gauss)

$L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}q = 0$ (Ecuación diferencial de la corriente eléctrica ,donde q es la carga eléctrica, R la resistencia, L la inductancia, C la capacitancia).

A las ecuaciones diferenciales ordinarias se representa mediante el simbolo:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

Donde F indica la relación que existe entre las variables x, y , además sus derivadas

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

2do. Si la función incógnita depende de varias variables independientes y las derivadas son derivadas parciales, la ecuación diferencial se llama **"Ecuación Diferencial Parcial"**.

Ejemplos: Las siguientes ecuaciones son ecuaciones diferenciales parciales.

a) $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\omega}{\partial z^2} = 0$, *donde* $\omega = f(x, y, z)$ (Ecuación diferencial de Laplace)

b) $\dfrac{\partial^2y}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2y}{\partial x^2}$ (Ecuación diferencial de la onda unidimensional)

c) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = h^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$ (Ecuación diferencial térmica unidimensional)

d) $a^2(\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\omega}{\partial z^2}) = \dfrac{\partial\omega}{\partial t}$ (Ecuación diferencial del calor)

e) $a^2(\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\omega}{\partial z^2}) = \dfrac{\partial^2\omega}{\partial t^2}$ (Ecuación diferencial de la onda)

f) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2u}{\partial y^2} = f(x, y)$ (Ecuación diferencial bidimensional de Poisson)

1.4. Orden de una Ecuación Diferencial Ordinaria:

El orden de una ecuación diferencial ordinaria, está dado por el orden mayor de su derivada.

1.5. Grado de una Ecuación Diferencial Ordinaria:

El grado de una ecuación diferencial ordinaria, está dado por el exponente del mayor orden de su derivada.

Ejemplos:

Determinar el orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

1. $e^x \frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} x.\frac{dy}{dx} = x,$ es de 2do. orden y de 1er. grado.

2. $\frac{d^3y}{dx^3} + 2(\frac{d^2y}{dx^2})^3 + \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x,$ es de 3er. orden y de 1er. grado.

3. $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x).$ es de 1er. orden y de 1er. grado.

4. $(\frac{d^3y}{dx^3})^2 - 2(\frac{dy}{dx})^4 + xy = 0.$ es de 3er. orden y de 2do. grado.

Ejercicios Propuestos:

Determinar el orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. $\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$ 2. $(\frac{d^3y}{dx^3})^4 + (\frac{d^2y}{dx^2})^5 + y = 0$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dy}{dx} + (\frac{dy}{dx})^2 + y = 0$ 4. $\sqrt{y'+y} = \cos x$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[4]{y + (\frac{dy}{dx})^2}$ 6. $(D_xy)^3 = 3x^2 - 1$

7. $x^4\frac{dy}{dx} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} = y^4\frac{d^3y}{dx^3}$ 8. $(\frac{d^2y}{dx^2})^3 + \frac{d^2y}{dx^2}.(\frac{dy}{dx})^4 - x^7y = \cos x$

9. $x(y'')^3 + (y')^4 - y = 0$ 9. $\cos x.(y'')^2 + \operatorname{sen} x(y')^4 = 1$

1.6. Solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria:

Si y = F(x) es una función y f es la derivada de F, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x), \quad \text{de donde:}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

La ecuación (α) es una ecuación diferencial ordinaria.

La solución de la ecuación (α) consiste en buscar una función y = G(x) de tal manera que verifique a la ecuación (α).

Como F es la antiderivada de f, entonces G(x) = F(x) + C. donde C es una constante, es decir:

$$d(G(x)) = d\,(F(x) + C) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$$

$$\text{Luego:} \quad y = G(x) = F(x) + C \ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Se llama solución completa o solución general de la ecuación diferencial (α).

La solución general (β) nos representa una familia de curvas que dependen de una constante arbitraria que se llama familia de un parámetro.

En los problemas que incluyen ecuaciones diferenciales, se trata de obtener soluciones particulares, luego de la solución general de la ecuación diferencial, mediante ciertas restricciones, llamadas condiciones iniciales o de la frontera, se obtiene la solución particular.

Nota.- En la Solución General de la ecuación diferencial que llamamos no se considera las soluciones escondidas es decir que no están todas las soluciones.

Ejemplos:

1. Verificar que las funciones $y_1 = e^x$, $y_2 = \cosh x$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$.

Solución

$$y_1 = e^x \Rightarrow y'_1 = e^x \Rightarrow y''_1 = e^x$$

$$y_2 = \cosh x \Rightarrow y'_2 = \operatorname{senh} x \Rightarrow y''_1 = \cosh x$$

Como $y'' - y = 0 \Rightarrow e^x - e^x = 0$, $y'' - y = 0 \Rightarrow \cosh x - \cosh x = 0$

2. Verificar que la función $y = \varphi(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2}$, es solución de la ecuación diferencial $y' = 2xy = 1$

Solución

$$y=\varphi(x)=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+e^{x^2} \Rightarrow y'=\varphi'(x)=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+1+2xe^{x^2}$$

$$y'-2xy=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+1+2xe^{x^2}-2x\left(e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+e^{x^2}\right)$$

$$=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+1+2xe^{x^2}-2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt-2xe^{x^2}=1 \quad , \quad \therefore\ y'-2xy=1$$

3. Verificar si la función $J_0(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(t\ sen\theta)d\theta$, satisface a la ecuación diferencial $J''_0(t)+\frac{J'_0(t)}{t}+J_0(t)=0$

Solución

$$J_0(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(t\,sen\,\theta)d\theta \Rightarrow J'_0(t)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}sen(t\,sen\,\theta)\,sen\,\theta\ d\theta$$???

$$J''_0(t)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(t\,sen\,\theta)\,sen^2\,\theta\ d\theta$$

$$J''_0(t)+\frac{J'_0(t)}{t}+J_0(t)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(t\,sen\,\theta)\,sen^2\,\theta\ d\theta$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{sen(t\,sen\,\theta)\,sen\,\theta}{t}d\theta+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(t\,sen\,\theta)d\theta$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{-\pi/2}\cos(t\,sen\,\theta)(1-\cos^2\theta)d\theta-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{sen(t\,sen\,\theta)\,sen\,\theta\ d\theta}{t}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(t\,sen\,\theta)\cos^2\theta d\theta-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{sen(t\,sen\,\theta)\,sen\,\theta d\theta}{t}\ldots\ldots(1)$$

Integrando por partes $\int_0^{\pi/2}\cos(t\,sen\,\theta)\cos^2\theta d\theta$.

$$\begin{cases}u=\cos\theta\\ dv=\cos(t\,sen\theta)\cos\theta\ \ d\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-sen\theta\ \ d\theta\\ v=\dfrac{sen(t\,sen\theta)}{t}\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos(t\,sen\theta)\cos^2\theta\ \ d\theta=\frac{\cos\theta.sen(t\,sen\theta)}{t}\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{sen(t\,sen\theta)\,sen\theta}{t}d\theta$$

$$=(0-0)+\int_0^{\pi/2}\frac{sen(t\,sen\theta)\,sen\theta}{t}d\theta$$

Luego $\int_0^{\pi/2}\cos(t\,sen\theta)\cos^2\theta\ \ d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{sen(t\,sen\theta)\,sen\theta}{t}d\theta$ ....(2)

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$J''_0(t)+\frac{J'_0(t)}{t}+J_0(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{sen(t\,sen\theta)\,sen\theta}{t}d\theta$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{sen(t\,sen\theta)\,sen\theta\ \ d\theta}{t}=0\ ,$$

$$\therefore\quad J''_0(t)+\frac{J'_0(t)}{t}+J_0(t)=0$$

4. Dada la función $F(x)=\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}d\theta$, $x>0$, verificar que F satisface a la ecuación diferencial. $x\,F''(x)+F'(x)-x\,F(x)=0$

Solución

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}d\theta\Rightarrow F'(x)=-\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\ \ d\theta$$

$$F''(x)=\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\cosh^2\theta\ \ d\theta$$

$$xF''(x)+F'(x)-xF(x)=x\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\cosh^2\theta\ \ d\theta-\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\ \ d\theta$$

$$-x\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}d\theta$$

$$= x\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}(\cosh^2\theta - 1)d\theta - \int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\ d\theta$$

$$= x\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\operatorname{senh}^2\theta\ d\theta - \int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\ d\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Integrando por partes $\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\operatorname{senh}^2\theta\ d\theta$

$$\begin{cases} u = \operatorname{senh}\theta \\ dv = e^{-x\cosh\theta}\operatorname{senh}\theta\ d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cosh\theta\ d\theta \\ v = -\dfrac{e^{-x\cosh\theta}}{x} \end{cases}$$

$$\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\operatorname{senh}^2\theta\ d\theta = -\frac{\operatorname{senh}\theta . e^{-x\cosh\theta}}{x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\ d\theta$$

$$= -(0-0) + \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\ d\theta$$

Luego $\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\operatorname{senh}^2\theta\ d\theta = \dfrac{1}{x}\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\ d\theta \ldots\ldots\ldots (2)$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$xF''(x) + F'(x) - xF(x) = x\left(\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\ d\theta\right) - \int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\ d\theta$$

$$= \int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\ d\theta - \int_0^\infty e^{-x\cosh\theta}\cosh\theta\ d\theta = 0$$

$$\therefore\ x F''(x) + F'(x) - x F(x) = 0$$

Ejercicios Propuestos:

1. Verificar que la función $y = x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\ dt$, satisface a la ecuación diferencial $x\frac{dy}{dx} = y + x\operatorname{sen} x$.

2. Comprobar que la función $y = e^x\int_0^x e^{t^2}dt + ce^x$, satisface a la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - y = e^{x+x^2}$

3. Dada la función $H(a) = \int_{-1}^1 \frac{\cos atdt}{\sqrt{1-t^2}}$, $a \neq 0$, probar que H (a) satisface a la ecuación diferencial $H''(a) + \frac{1}{a}H'(a) + H(a) = 0$.

4. Verificar que la función y = arc. sen (x y), satisface a la ecuación diferencial $xy' + y = y'\sqrt{1 - x^2y^2}$

5. Comprobar que la función $x = y\int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt$, satisface a la ecuación diferencial $y = xy' + y^2 \operatorname{sen} x^2$

6. Comprobar que la función $y = C_1x + C_2x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$, satisface a la ecuación diferencial x sen x.y´´ - x cos x.y´ + y cos x = 0.

7. Sea $h(x) = \int_1^x \frac{e^z}{z}dz$, $x > 0$, hallar los valores de "a" tal que la función f definida por $f(x) = \frac{e^{ah(x)}}{x}$ satisface a la ecuación diferencial.
$x^2 y'' + (3x - x^2)y' + (1 - x - 3e^{2x})\,dy = 0$ Rpta. $a = \pm\sqrt{3}$

8. Verificar que la función x = y + Ln y, satisface a la ecuación diferencial $yy'' + y'^3 - y'^2 = 0$.

9. Dada la función $H(a) = \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} atdt}{\sqrt{1-t^2}}$, $a \neq 0$ probar que H (a) satisface a la ecuación diferencial $H''(a) + \frac{1}{a}H'(a) + H(a) = 0$

10. Si $x(t) = \int_0^t (t-s)e^{-(t-s)}e^s ds$, calcular el valor de: $x''(t) + 2x'(t) + x(t)$

11. Probar que la función $y = \frac{1}{k}\int_0^x R(t)\,\text{senh}\,k(x-t)dt$, satisface a la ecuación diferencial $y'' + k^2 y = R(x)$

12. Probar que la función $y = C_1 x + C_2 x \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt$, x > 0, satisface a la ecuación diferencial $x^2 y'' - (x^2 + x)y' + (x+1)y = 0$.

13. Dada la función $y = C_1 Ln\ x + C_2 x \int_x^e \frac{dt}{Ln(t)}$, x > 1, satisface a la ecuación diferencial $x^2 \ln^2 x.y'' - x\ln x.y' + (\ln x + 1)y = 0$.

14. Demostrar que la función $\phi\ (x) = x^{-1} e^{\int_{x_0}^{x} u^{-1} e^{u} du}$ para x > 0, satisface a la ecuación diferencial $x^2\phi''(x) + (3x - x^2)\phi'(x) + (1 - x - e^{2x})\phi(x) = 0$.

15. Dada la función $y\ Ln\ y = x + \int_0^x e^{t^2} dt$, satisface a la ecuación diferencial $y(1 + \ln y)y'' + y'^2 = 2xy e^{x^2}$.

16. Demostrar que la función $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^k$, satisface a la ecuación diferencial $(1 + x^2)y'' + xy' - k^2 y = 0$.

17. Probar que la función x(t) definida por: $x(t) = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + t^2)^2}$, satisface a la ecuación diferencial $tx'(t) + 3x(t) + \frac{1}{(1+t^2)^2} = 0$

18. Demostrar que la función $f(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax^3 - bx^2} dx$, satisface a la ecuación diferencial $3ab\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} - 3a\frac{\partial f}{\partial b} - 2b^2\frac{\partial f}{\partial a} = 1$

19. Probar que $\frac{y}{x} = \int_0^{\pi/2} \cos(mx^n \operatorname{sen}\theta)\cos^{1/n}\theta d\theta$, satisface a la ecuación diferencial $y'' + m^2 n^2 x^{2n-2} y = 0$

20. Probar que $y = \int_0^\infty \frac{a \operatorname{sen} z + b\cos z}{x+z} dz$, satisface a la ecuación diferencial $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$

21. Verificar que las funciones $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = x^{-1/2}$, x > 0, satisfacen a la ecuación diferencial $2x^2 y'' + 3xy' - y = 0$.

22. Verificar que las funciones $y_1 = x^{-2}$, $y_2 = x^{-2}\ \text{Ln}\ x$, x > 0, satisfacen a la ecuación diferencial $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$.

23. Demostrar que la función $y = \int_0^{\pi/2} \log\ (\text{sen}^2\ \theta + x^2 \cos^2\theta)\ d\theta$, satisface a la ecuación diferencial $(1 + x)^2 y'' + (1 + x)\ y' + y = \pi \log\left(\frac{x+1}{2}\right)$

24. Dada la función $u = \int_0^\pi e^{qx\cos\theta}(A + B\log(x\,\text{sen}^2\,\theta))d\theta$, satisface a la ecuación diferencial $x\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - q^2 xu = 0$

25. Demuestre que la función $y = \int_0^\infty \frac{e^{-xz} dz}{(1+z^2)^{n+1}}$, satisface a la ecuación diferencial $xy'' - 2n\,y' + xy = 1$

26. Si $H(t) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(tx)dx$, para todo $t \in R$, probar que $H'(t) + \frac{t}{2}H(t) = 0$

27. Si $G(t) = \int_0^\infty e^{-x^2 - (t/x)^2} dx, t > 0$, probar que: $G'(t) + 2\,G(t) = 0$

28. Verificar si la función $y = C_1 e^{b\ \text{arc.sen}\ x} + C_2 e^{-b\ \text{arc.}\ \text{sen}\ x}$ es la solución de la ecuación diferencial $(1 - x^2)\ y'' - xy' - b^2 y = 0$

29. Verificar que $(y'')^2 = [1 + (y')^2]^3$ es la solución diferencial de las circunferencias de radio r = 1

30. Demostrar que: $y = e^{x^2}(C_1 + C_2\int e^{-x^2} dx)$ es la solución de la ecuación diferencial $y'' - 2xy' - 2y = 0$

31. Probar que la función $y(t) = \int_0^t \text{sen}(t-s)f(s)ds$ es una solución en I de $y''(t) + y(t) = f(t)$, que satisface $y(0) = y'(0) = 0$, donde f es una función continua sobre el intervalo I, el cual contiene al cero.

32. Demostrar que $y(t)=\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)\, ds$ es solución de $y^{(n)}(t) = f(t)$ con $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)} = 0$ donde f es continua sobre un intervalo I que contiene al cero.

33. Comprobar que $y = 2\int_0^{\sqrt{x}} e^{-s^2}\, ds + c$ es solución de $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$

1.7. Origen de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:

Las ecuaciones diferenciales aparecen no sólo a partir de las familias de curvas geométricas, sino también del intento de describir en términos matemáticos, problemas físicos en ciencias e ingeniería.

Se puede afirmar que las ecuaciones diferenciales son la piedra angular de disciplinas como la física y la ingeniería eléctrica, e incluso proporcionan un importante instrumento de trabajo en áreas tan diversas como la biología y la economía.

Veremos la obtención de ecuaciones diferenciales que se origina de diversos problemas los cuales pueden ser geométricos, físicos o por primitivas.

1.7.1. Ecuación Diferencial de una Familia de Curvas:

Si se tiene la ecuación de una familia de curvas, se puede obtener su ecuación diferencial mediante la eliminación de las constantes (o parámetros) y esto se obtiene aislando la constante en un miembro de la ecuación y derivando. También se puede eliminar la constante derivando la ecuación dada, tantas veces como constantes arbitrarias tenga, y se resuelve el sistema formado con la ecuación original.

Ejemplos.-

1. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es $y = C_1 \cos(x+C_2)$

Solución

$y = C_1 \cdot \cos(x + C_2) \Rightarrow y' = -C_1 \operatorname{sen}(x + C_2)$,

$y'' = -C_1 \cos(x + C_2)$

donde $\begin{cases} y'' = -C_1 \cos(x+C_2) \\ y = C_1 \cos(x+C_2) \end{cases} \Rightarrow \underline{y''+y=0}$, se deriva hasta elin la constante.

2. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es $y = A \operatorname{sen}x + B \cos x$

Solución

$y = A \operatorname{sen} x + B \cos x \Rightarrow \begin{cases} y' = A \cos x - B \operatorname{sen} x \\ y'' = -A \operatorname{sen} x - B \cos x \end{cases}$

de donde $\begin{cases} y'' = -A \operatorname{sen} x - B \cos x \\ y = A \operatorname{sen} x + B \cos x \end{cases} \Rightarrow y''+y=0$

Otra manera de eliminar las constantes es, considerando el sistema siguiente:

$$\begin{cases} y = -A \operatorname{sen} x + B \cos x \\ y' = A \cos x - B \operatorname{sen} x \\ y'' = -A \operatorname{sen} x - B \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + A \operatorname{sen} x + B \cos x = 0 \\ -y' + A \cos x - B \operatorname{sen} x = 0 \\ -y'' - A \operatorname{sen} x - B \cos x = 0 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones en dos incógnitas A y B tienen la solución si y sólo si:

$$\begin{vmatrix} -y & \operatorname{sen} x & \cos x \\ -y' & \cos x & -\operatorname{sen} x \\ -y'' & -\operatorname{sen} x & -\cos x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y''+y=0$$

3. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$

Solución

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} \Rightarrow e^x y = C_1 + C_2 e^{-2x}$ derivando

$e^x y' + e^x y = -2C_2 e^{-2x}$

$e^{3x} y' + e^{3x} y = -2C_2 \Rightarrow 3e^{3x} y' + e^{3x} y'' + 3e^{3x} y + e^{3x} y' = 0$

$3y' + y'' + 3y + y' = 0 \Rightarrow y'' + 4y' + 3y = 0$

Otra manera es:

$$\begin{cases} y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} \\ y' = -C_1e^{-x} - 3C_2e^{-3x} \\ y'' = C_1e^{-x} + 9C_2e^{-3x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} = 0 \\ -y' - C_1e^{-x} - 3C_2e^{-3x} = 0 \\ -y'' + C_1e^{-x} + 9C_2e^{-3x} = 0\end{cases}$$

el sistema tiene solución si y sólo si:

$$\begin{vmatrix} -y & e^{-x} & e^{-3x} \\ -y' & -e^{-x} & -3e^{-3x} \\ -y'' & e^{-x} & 9e^{-3x}\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow e^{-4x}\begin{vmatrix} -y & 1 & 1 \\ -y' & -1 & -3 \\ -y'' & 1 & 9\end{vmatrix} = 0$$

de donde $y'' + 4y' + 3y = 0$

4. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es $(x-a)^2 + y^2 = r^2$, circunferencias de radio fijo r, con centro en el eje x, siendo "a" arbitrario.

Solución

$(x-a)^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x - a = \sqrt{r^2 - y^2}$ derivando se tiene:

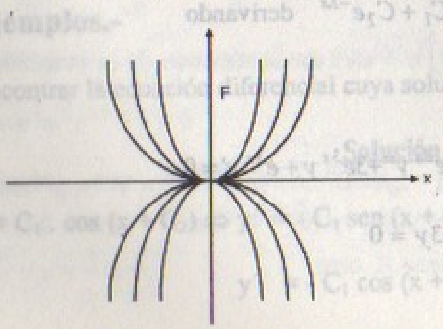
$$1 - 0 = \frac{-yy'}{\sqrt{r^2 - y^2}} \Rightarrow \sqrt{r^2 - y^2} = -yy'$$

de donde $r^2 - y^2 = y^2 y'^2$, $\therefore (1 + y'^2)y^2 = r^2$

5. Encontrar la ecuación diferencial de la familia de parábolas las que tienen sus vértices en el origen y sus focos sobre el eje y.

Solución

De acuerdo a los datos del problema, la gráfica de estas parábolas es:



La ecuación de ésta familia de parábolas es:
$x^2 = 4py$..........................(1)

donde el vértice es v(0,0) y el foco F(O,P).

Como el parámetro es P entonces lo eliminamos

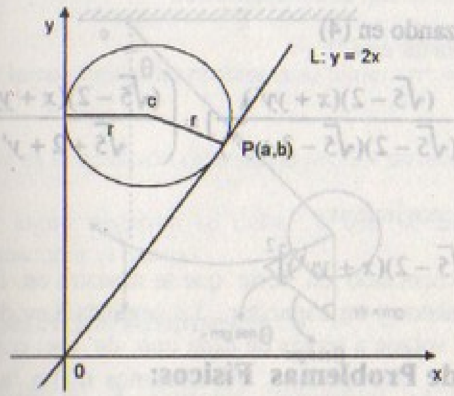
$\frac{x^2}{y} = 4p$, derivando se tiene $\frac{y^2x - x^2y'}{y^2} = 0$ simplificando

$\therefore$ $xy' = 2y$ ecuación diferencial pedida

6. Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencia en el primer cuadrante, tangentes a las rectas x = 0 e y = 2x

Solución

De los datos del problema, el gráfico es:



Si c (h,k) el centro $\Rightarrow$ r = h por ser tangente el eje y

$r^2 = d^2(c,p) = (a-h)^2 + (b-k)^2$

$r^2 = (a-h)^2 + (b-k)^2$

pero $p(a,b) \in$ L: $y = 2x \Rightarrow b = 2a$

Luego $r^2 = (a-h)^2 + (2a-k)^2$...........(1)

Además la ecuación de la circunferencia de radio r, centro c (h,k) es:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$..(2)

Ahora derivamos la ecuación (2) se tiene; $(x-h) + (y-k)y' = 0$

Como en el punto p (a,b) es tangente a la recta y = 2x

$\Rightarrow y'|_{x=a} = 2$ entonces $(a-h) + 2(2a-k) = 0 \Rightarrow 5a = h + 2k$

$$a = \frac{h+2k}{5} \quad \text{y} \quad b = \frac{2}{5}(h+2k)\text{.............(3)}$$

Reemplazando (3) en (1) $h^2 = (\frac{h+2k}{5} - h)^2 + (\frac{2}{5}(h+2k) - k)^2$

$h^2 = (\frac{2k-4h}{5})^2 + (\frac{2h-k}{5})^2$, simplificando

$5h^2 + 20kh - 5k^2 = 0 \Rightarrow h^2 + 4kh - k^2 = 0$

$\Rightarrow h = (\sqrt{5}-2)k$ ó $\Rightarrow k = \dfrac{h}{\sqrt{5}-2}$

$(x-h)^2 + (y - \dfrac{h}{\sqrt{5}-2})^2 = h^2$ ......(4)

La expresión (4) es la ecuación de la familia de circunferencias, para hallar la ecuación diferencial, eliminamos el parámetro h de la ecuación (4) para esto derivamos:

$2(x-h) + 2(y - \dfrac{h}{\sqrt{5}-2})y' = 0$ despejando h

$h = \dfrac{(\sqrt{5}-2)(x+yy')}{\sqrt{5}-2+y'}$ reemplazando en (4)

$$[x - \frac{(\sqrt{5}-2)(x+yy')}{\sqrt{5}-2+y'}]^2 + [y - \frac{(\sqrt{5}-2)(x+yy')}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2+y')}] = \left(\frac{(\sqrt{5}-2)(x+yy')}{\sqrt{5}+2+y'}\right)$$

Simplificando se tiene:

$$\left(x-(\sqrt{5}-2)y\right)^2(1+y'^2) = \left[(\sqrt{5}-2)(x+yy')\right]^2$$

1.7.2. Ecuaciones Diferenciales de Problemas Físicos:

Las ecuaciones diferenciales de problemas físicos provienen de diferentes fuentes, tales como la mecánica, eléctrica, química, etc.

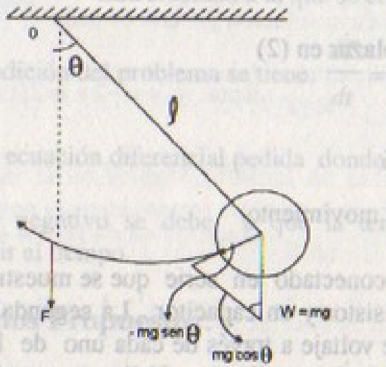
Ejemplos:

1. Se sabe que los objetos en caida libre cercanos a la superficie de la tierra tiene una aceleración constante g. Ahora bien, la aceleración es la derivada de la velocidad y esta a su vez, es la derivada de la distancia S. Luego, si se toma como dirección positiva la dirección vertical hacia arriba, tenemos que la fórmula. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -g$ es la ecuación diferencial de la distancia vertical recorrida por el cuerpo que cae. Se usa el signo menos puesto que el peso del cuerpo es una fuerza de dirección opuesta a la dirección positiva.

2. Una masa m de peso w se suspende del extremo de una varilla de longitud constante L. Suponiendo que el movimiento se realiza en un plano vertical, se trata de determinar el ángulo de desplazamiento θ, medido con respecto a la vertical, en función del tiempo t, (se considera θ > 0º a la derecha de op y θ < 0º a la izquierda de op). Recuérdese que el arco s de un círculo de radio L se relaciona con el ángulo del centro θ por la fórmula s = L θ.

Por lo tanto, la aceleración angular es: $a = \dfrac{d^2s}{dt^2} = L\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

por la segunda ley de Newton: $F = ma = mL\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$



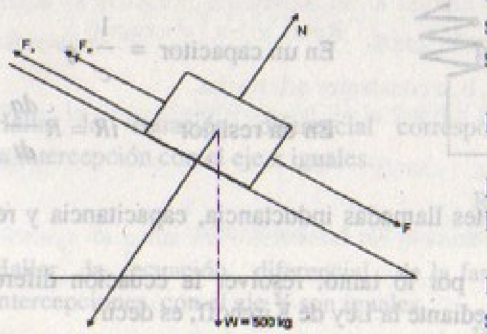
En la figura vemos que la componente tangencial de la fuerza debida al peso w es mg sen θ, si no se tiene en cuenta la masa de la varilla y se igualan las dos expresiones de la fuerza tangencial se obtiene:

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\text{sen}\,\theta = 0$$

3. Una lancha que pesa 500kg. se desliza por un plano inclinado a 5º. Si la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento es 20kg. y la resistencia de aire expresado en kilogramos equivale a 0.05 veces la velocidad en centímetros por segundo, hallar la ecuación del movimiento.

Solución



En la figura mostramos a la lancha sobre un plano inclinado; tomemos los siguientes datos:

F = Componente de peso en la dirección del movimiento.
F_R = Fuerza de rozamiento
F_a = Resistencia del aire

De acuerdo a la segunda ley de Newton se tiene:

Suma de fuerzas en la dirección del movimiento = (masa) x (aceleración)
Luego se tiene:

$F - F_R - F_a = m.a$ ....(1)

donde $F = 500 \text{ sen } 5^{\circ} = 43.6$, $F_R = 20$

$Fa = 0.05v$, $m = \dfrac{500}{981}$ siendo v = la velocidad, a = aceleración, m = la masa.

ahora reemplazamos en la ecuación (1)

$43.6 - 20 - 0.05v = \dfrac{500}{981}a$ entonces $23.6 - 0.05v = \dfrac{500}{981}a$ ....(2)

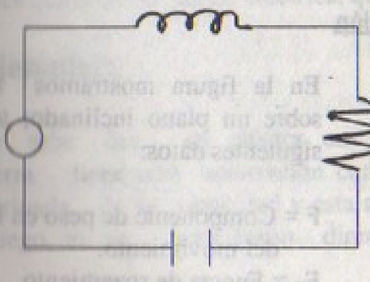
como $a = \dfrac{dv}{dt}$ que al reemplazar en (2)

se tiene: $\dfrac{500}{981}.\dfrac{dv}{dt} + 0.05v = 23.6$

que es la ecuación diferencial del movimiento.

4. Considere el circuito simple conectado en serie que se muestra en la figura y que consta de un inductor, un resistor y un capacitor. La segunda Ley de Kirchoff dice que la suma de las caídas de voltaje a través de cada uno de los componentes del circuito es igual a la tensión E(t) aplicada. Si llamamos q(t) a la carga del capacitor en un instante cualquiera, entonces la corriente i(t) está dada por $i = \dfrac{dq}{dt}$,

ahora bien, se sabe que las caídas del voltaje son:



En un inductor $= L\dfrac{di}{dt} = L\dfrac{d^2q}{dt^2}$

En un capacitor $= \dfrac{1}{c}q$

En un resistor $= iR = R\dfrac{dq}{dt}$

en donde L, C y R son constantes llamadas inductancia, capacitancia y resistencia respectivamente.

Para determinar q(t) debemos por lo tanto, resolver la ecuación diferencial de segundo orden que se obtiene mediante la Ley de Kirchoff, es decir:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = E(t)$$

5. Según la Ley de enfriamiento de Newton, la velocidad a la que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del aire. Obtener la ecuación diferencial respectiva.

Solución

Consideremos los siguientes datos:

T	=	Temperatura de la sustancia en el instante t
Ta	=	Temperatura del aire
$\dfrac{dT}{dt}$	=	La velocidad a la que se enfría una sustancia

de la condición del problema se tiene: $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_a),\ k > 0$

que es la ecuación diferencial pedida donde k es la constante de proporcionalidad.

El signo negativo se debe a que la temperatura de la sustancia disminuye al transcurrir el tiempo.

Ejercicios Propuestos:

1. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de circunferencias:
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ en el plano xy, siendo a, b y r constantes arbitrarias.

Rpta: $(1 + y'^2)y''' = 3y'y''^2$

2. Hallar la ecuación diferencial correspondiente a la cisoides, $y^2 = \dfrac{x^3}{a - x}$

Rpta: $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$

3. Hallar la ecuación diferencial correspondiente a las rectas con pendientes y la intercepción con el eje x iguales.

Rpta: $y'^2 = xy' - y'$

4. Hallar la ecuación diferencial de la familia de rectas cuyas pendientes y sus intercepciones con el eje Y son iguales.

Rpta: ydx - (x + 1) dy = 6

5. Hallar la ecuación diferencial de la familia de rectas cuya suma algebraica de las intercepciones con los ejes coordenados es igual a k.

Rpta: $(xy'-y)(y'-1)+ky'=0$

6. Hallar la ecuación diferencial correspondiente a las estrofoides $y^2=\dfrac{x^2(a+x)}{a-x}$,

Rpta: $(x^4-4x^2y^2-y^4)dx+4x^3y\,dy=0$

7. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de circunferencias $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, de radio fijo r en el plano xy siendo a y b constantes arbitrarias.

Rpta: $(1+y'^2)^3=r^2y''^2$

8. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es dada.

a) $y=x^2+C_1e^x+C_2e^{-2x}$ Rpta: $y''+y'-2y=2(1+x-x^2)$

b) $y=C_1x+C_2e^x$ Rpta: $(x+1)y''+xy'-y=0$

c) $y=x+C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$ Rpta: $y''+4y'+3y=4+3x$

d) $y=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\operatorname{sen} 3x$ Rpta: $y''-4y'+13y=0$

e) $y=Ae^{2x}+Bxe^{2x}$ Rpta: $y''-4y'+4y=0$

f) $y=e^{x^2}(C_1+C_2\int e^{-x^2}dx)$, Rpta: $y''-2xy'-2y=0$

g) $y=Ae^{1/\sqrt{x}}+Be^{-1/\sqrt{x}}$ Rpta: $4x^3y''+6x^2y'-y=0$

h) $y=C_1x.\int\dfrac{e^{x^{2/3}}}{x^2}dx+C_2x$ Rpta: $y''-x^2y'+xy=0$

i) $(ax+b)(ay+b)=c$, a, b, c constantes arbitrarias.

Rpta: $(x-y)y''+2y'+2y'^2=0$

j) $y=C_1e^{ax}\cos bx+C_2e^{ax}\operatorname{sen} bx$, a, b parámetro.

Rpta: $y''-2ay'+(a^2+b^2)y=0$

k) $y=A(\cos x+x\operatorname{sen} x)+B(\operatorname{sen} x-x\cos x)$, A, B constantes

Rpta: $xy''-2y'+xy=0$

l) $x=A\operatorname{sen}(\omega t+\beta)$, ω un parámetro, no debe ser eliminado,

Rpta: $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$

m) $y=Ae^{x+y}+Be^{-x+y}$, A y B constantes arbitrarias

Rpta: $(y-1)y''+y=(y-2)y'^2$

n) $y=A\sqrt{1+x^2}+Bx$ Rpta: $(1+x^2)y''+xy'-y=0$

9. Encontrar la ecuación diferencial que describa la familia de circunferencias que pasan por el origen. Rpta: $(x^2+y^2)y''+2[y'^2+1](y-xy')=0$

10. Encontrar la ecuación diferencial de la familia de rectas que pasan por el origen.

Rpta: $xy'-y=0$

11. Determinar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias que pasan por el origen y cuyos centros están en el eje X.

Rpta: $2xy\,y'=y^2-x^2$

12. Halle la ecuación diferencial de la familia de circunferencias cuyos centros están en el eje Y.

13. Encontrar la ecuación diferencial de la familia de parábolas con vértice en el origen y cuyos focos están en el eje X.

Rpta: $2xy'=y$

14. Halle la ecuación diferencial de la familia de tangentes a la parábola $y^2=2x$

15. Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias que tienen su centro sobre el eje X. Rpta: $y'^2+yy''+1=0$

16. Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas con el eje focal paralelo al eje X. Rpta: $y'^2y'''=3y'y''^2$

17. Obtenga la ecuación diferencial de la familia de parábolas cuyos vértices y focos están en el eje X. Rpta: $yy''+y'^2=0$

18. Obtenga la ecuación diferencial de la familia de circunferencias que pasan por (0,-3) y (0,3), y cuyos centros están en el eje X.

19. Hallar la ecuación diferencial de todas las circunferencias que pasan por los puntos (2,2) y (-2,2).

Rpta: $(x^2 - y^2 - 2xy - 8)\dfrac{dy}{dx} - (x^2 - y^2 - 2xy + 8) = 0$

20. Hallar la ecuación diferencial de todas las lineas tangentes a la curva $y^2 = -x$

21. Hallar la ecuación diferencial de todas las circunferencias tangentes a la recta $y = -x$

Rpta: $(x - y)y''\,[2 - (x - y)\,y''] = 2\,y'\,[1 + y'^2]^2$

22. Por un punto p(x,y) de una curva que pasa por el origen, se trazan dos rectas paralelas a los ejes coordenados, las que determinan un rectángulo con dichos ejes. Hallar la ecuación diferencial de la curva, de modo que ésta divida al rectángulo formado en dos regiones, donde el área de la parte derecha sea el triple del área de la parte izquierda.

Rpta: $3xy' = y$

23. Hallar la ecuación diferencial de todas las tangentes a la parábolas $x^2 = 2y + 1$.

Rpta: $2xy' - y'^2 - 2y - 1 = 0$

24. Hallar la ecuación diferencial de todas las normales de la parábola $y^2 = x$

Rpta: $y'\,(4x - y'^2) = 4y + 2y'$

25. Determinar la ecuación diferencial de todas las curvas planas $y = f(x)$ tal que la ley que incide en ellas, partiendo de una fuente puntual fija, es reflejada hacia un segundo punto fijo. Suponer que los puntos fijos son (a,0) y (-a, 0).

Rpta: $xyy'^2 + (x^2 - y^2 - a^2)\,y' = xy$

26. Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas que satisfacen la siguiente propiedad: ´´El área de la región encerrada por la curva, los ejes coordenados x e y, y la coordenada del punto p(x,y) de la curva es igual a $(x^2 + y^2)$´´

Rpta: $2yy' + 2x - y = 0$

27. Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas que cumple con la siguiente propiedad: ´´Si por un punto cualquiera de una curva de la familia se trazan las rectas tangente y normal a ella, el área del triángulo formado por dichas rectas con el eje y es igual a $\dfrac{x^2 y_0}{2}$, donde y_0 es la coordenada del punto en que la tangente corta el eje y.

Rpta: $y'^2(1 + x) - y\,y' + 1 = 0$

28. Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas que satisface la condición siguiente: ´´Si por el punto p(x,y) de una curva, en el primer cuadrante, se trazan las rectas tangente y normal a ella, siendo T el punto de intersección de la tangente con el eje 0X y N el punto de intersección de la normal con el eje 0Y, entonces el área del triángulo TON es igual al $\dfrac{xy}{2}$, donde 0 es el origen de coordenadas.

Rpta: $(x^2 - y^2)\,y' = xy$

29. Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas que satisfacen la siguiente condición: ´´Si por un punto cualquiera p(x,y) de una curva de la familia se trazan las rectas tangente y normal a la curva, y si además A es el punto de intersección de la recta normal con la recta y = x y B es la intersección de la recta tangente con la recta y = x entonces el segmento $\overline{AB}$ tiene longitud $\sqrt{2}$.

Rpta: $(y'^2 - 1)^2 = (x - y)^2\,(y'^2 + 1)^2$

30. Hallar la ecuación diferencial perteneciente a las cardioides $r = a(1 - \text{sen}\,\theta)$

Rpta: $(1 - \text{sen}\,\theta)\,dr + r\cos\theta\,d\theta = 0$

31. Hallar la ecuación diferencial perteneciente a la estrofoides, $r = a\,(\sec\theta + \text{tg}\,\theta)$.

Rpta: $\dfrac{dr}{d\theta} = r\sec\theta$

32. Encontrar la ecuación diferencial de las siguientes soluciones generales:

a) $y = A\dfrac{\text{senh}\,x}{x} + B\dfrac{\cosh x}{x}$, A, B constantes.

b) $\text{tgh}(\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2}) = \sqrt{3}\,\text{tg}(\dfrac{\sqrt{3}}{4}x + C)$, C constante.

c) $\pm(x + c) = \sqrt{k^2 - y^2} - k\,\text{arc.cosh}(\dfrac{k}{y})$, k fijo y c arbitrario

d). $y = a\cosh(\dfrac{x - b}{a})$, a, b constantes arbitrarios.

e) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3\,x\,e^{2x}$, C_1, C_2, C_3 constantes.

33. Encontrar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias de radio 1, con centros en la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Rpta: $(x - y)^2\,(1 + y'^2) = (1 + y')^2$

34. Hallar la ecuación diferencial de todas las parábolas con eje paralelo al eje y, y tangente a la recta y = x .

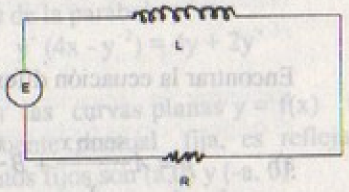
Rpta: $y'^2 = 2yy'' - 2xy'' + 2y' - 1$

35. Hallar la ecuación diferencial de las curvas tales que la tangente en un punto cualquiera M forme un ángulo θ con el eje 0X y que verifique $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$ siendo ϕ el ángulo que OM forme con el eje OX.

36. En la práctica, un cuerpo B de masa m que va cayendo (tal como un hombre que desciende en paracaidas) encuentra una resistencia del aire proporcional a su velocidad instantánea v(t). Usa la segunda ley de Newton para encontrar la ecuación diferencial de la velocidad del cuerpo en un instante cualquiera.

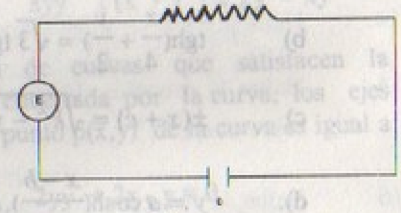
Rpta: $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$

37. Un circuito en serie contiene un resistor y un inductor, tal como se muestra en la figura. Determine la ecuación diferencial de la corriente i(t) si la resistencia es R, la inductancia es L y la tensión aplicada es E(t).



Rpta: $L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$

38. Un circuito en serie contiene un resistor y un capacitor, tal como se muestra en la figura, encuentre la ecuación diferencial para la carga q(t) del capacitor si la resistencia es R, la capacitancia es C y el voltaje aplicado es E(t).



39. ¿Cuál es la ecuación diferencial de la velocidad v de un cuerpo de masa m que cae verticalmente a través de un medio que opone una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea?

Rpta: $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v^2 = g$

CAPITULO II

2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN Y DE PRIMER GRADO

A las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de primer grado, representaremos en la forma:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \quad ....(1)$$

La ecuación (1) nos indica la relación entre la variable independiente x, la variable dependiente y, y su derivada $\frac{dy}{dx}$

De la ecuación diferencial $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, despejamos la derivada $\frac{dy}{dx}$; es decir en la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

2.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Variable Separable:

Si de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden y primer grado que es: $\frac{dy}{dx} = g(x,y)$, podemos expresar en la forma:

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \quad ....(2)$$

donde M es una función sólo de x y N es una función sólo de y, entonces a la ecuación (2) se le denomina **"ecuación diferencial ordinaria de variable separable"** y la solución general se obtiene por integración directa, es decir:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

donde C es la constante de integración.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(y^2 + xy^2)\frac{dy}{dx} + x^2 - x^2 y = 0$$

<u>**Solución**</u>

A la ecuación diferencial dada expresaremos en la forma:

$y^2 (x + 1)\,dy + x^2 (1 - y)\,dx = 0$, separando las variables

$\frac{y^2}{1-y}dy + \frac{x^2 dx}{1+x} = 0$, integrando se tiene:

$\int \frac{y^2}{1-y}dy + \int \frac{x^2 dx}{1+x} = C$, de donde tenemos:

$$\therefore \quad (x+y).(x-y-2) + 2\,Ln\left|\frac{1+x}{1-y}\right| = k$$

$x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,y' = 0$ $\quad (x\sqrt{1+y^2})\cdot x' + (y\sqrt{1+x^2})\,y' = 0$

mal redactado.

<u>**Solución**</u>

A la ecuación diferencial expresaremos así:

$x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$, separando las variables

$\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0$, integrando se tiene:

$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = C$, de donde tenemos:

$$\therefore \quad \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$$

3. $e^x \sec y\,dx + (1 + e^x)\sec y \,tg\, y\,dy = 0$, $y = 60°$ si $x = 3$

<u>**Solución**</u>

$e^x \sec y\,dx + (1 + e^x)\sec y\,tg\,y\,dy = 0$, separando la variable.

$\frac{e^x dx}{1+e^x} + tg\,y dy = 0$, integrando.

$\int \frac{e^x dx}{1+e^x} + \int tg y dy = C$, de donde se tiene:

$Ln(\frac{1+e^x}{\cos y}) = Lnk \Rightarrow 1 + e^x = k\cos y$

Cuando $x = 3, y = 60° \Rightarrow 1 + e^3 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2(1+e^3)$

$\therefore \quad 1 + e^x = 2\,(1 + e^3)\cos y$

4. $y\,Ln\,y\,dx + x\,dy = 0$, $y\,|_{x=1} = 1$

<u>**Solución**</u>

$y\,Ln\,y\,dx + x\,dy = 0$, separando las variables. $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{yLny} = 0$, integrando ambos miembros. $\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{yLny} = C$, de donde tenemos:

$Ln\,x + Ln(Ln\,y) = C \Rightarrow Ln(x\,.\,Ln\,y) = C$, Levantando el logaritmo: $x\,Ln\,y = k$

Cuando $x = 1, y = 1 \Rightarrow Ln\,1 = k \Rightarrow k = 0$

$x\,Ln\,y = 0 \Rightarrow Ln\,y = 0 \Rightarrow \therefore y = 1$

5. $(xy^2 - y^2 + x - 1)\,dx + (x^2 y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)\,dy = 0$

<u>**Solución**</u>

$(xy^2 - y^2 + x - 1)\,dx + (x^2 y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)\,dy = 0$, agrupando

$[y^2 (x - 1) + (x - 1)]\, dx + [x^2 (y + 1) - 2x (y + 1) + 2 (y + 1)\, dy = 0$

$(y^2 + 1)(x - 1)\, dx + (x^2 - 2x + 2)(y + 1)\, dy = 0$, separando las variables

$\frac{(x-1)dx}{x^2-2x+2} + \frac{(y+1)dy}{y^2+1} = 0$, integrando ambos miembros

$\int \frac{(x-1)dx}{x^2-2x+2} \cdot \int \frac{y+1}{y^2+1} dy = C$, de donde tenemos:

$\frac{1}{2} Ln|x^2-2x+2| + \frac{1}{2} Ln|y^2+1| + arc.\text{tg}\, y = C$,

$\text{Ln}\, ((x^2 - 2x + 2)(y^2 + 1)) + 2\ \text{arc.tg}\ y = C$.

$\text{Ln}\, ((x^2 - 2x + 2)(y^2 + 1)) = C - 2\ \text{arc. tg}\ y$, levantando el logaritmo

$(x^2 - 2x + 2)(y^2 + 1) = k\, e^{-2\, \text{arc. tg}\, y}$, de donde se tiene:

$\therefore \quad (x^2 - 2x + 2)(y^2 + 1)\, e^{2\, \text{tg}\, y} = k$

Ejercicios Propuestos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

$\text{tg}\, x \cdot \text{sen}^2 y \cdot dx + \cos^2 x . \text{ctg}\, y \cdot dy = 0$ Rpta: $\text{ctg}^2 y = \text{tg}^2 x + C$

$xy' - y = y^3$ Rpta: $x = \frac{cy}{\sqrt{1+y^2}}$

$\sqrt{1+x^3}\, \frac{dy}{dx} = x^2 y + x^2$ Rpta: $2\sqrt{1+x^3} = 3Ln(y+1) + C$

$e^{2x-y}\, dx + e^{y-2x}\, dy = 0$ Rpta: $e^{4x} + 2\, e^{2y} = C$

5. $(x^2 y - x^2 + y - 1)\, dx + (xy + 2x - 3y - 6)\, dy = 0$

Rpta: $\frac{x^2}{2} + 3x + y + Ln(x-3)^{10}(y-1)^3 = C$

6. $e^{x+y} \text{sen}\, x dx + (2y+1)e^{-y^2} dy = 0$ Rpta: $e^x(\text{sen}\, x - \cos x) - 2e^{-y^2-y} = C$

7. $3e^x\, \text{tg}\, y\, dx + (1-e^x)\sec^2 y\, dy = 0$ Rpta: $\text{tg}\, y = C(1-e^x)^3$

8. $e^y(\frac{dy}{dx}+1) = 1$ Rpta: $\ln(e^y - 1) = C - x$

9. $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$ Rpta: $arc.\text{tg} - x - \frac{x^2}{2} = C$

10. $y - xy' = a(1 + x^2 y)$ Rpta: $y = \frac{a+cx}{1+ax}$

11. $(1+y^2)dx = (y - \sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{3/2} dy$ Rpta: $Ln\left|\frac{\sqrt{1+y^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}\right| = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$

12. $(1-y)e^y y' + \frac{y^2}{xLnx} = 0$ Rpta: $C + \frac{e^y}{y} = Ln(Lnx)$

13. $e^{-y}(1+y') = 1$ Rpta: $e^x = C(1-e^{-y})$

14. $e^{x-y}dx + e^{y-x}dy = 0$ Rpta: $e^{2x} + e^{2y} = C$

15. $(1+y+y^2)dx + x(x^2-4)dy = 0$, Rpta: $\frac{1}{8} Ln(\frac{x^2-4}{x^2}) + \frac{2}{\sqrt{3}} arc.\text{tg}(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}) = C$

16. $y' = 10^{x+y}$, $a > 0$, $a \neq 1$ Rpta: $10^x + 10^{-y} = C$

17. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$ Rpta: $3y^2 - 2\ln(1+x^3) = C$

18. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$ Rpta: $y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = C$

19. $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+b}{cx+d}$, $a,b,c,d \in /R$ Rpta: $y = \frac{ax}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} Ln|cx+d| + k$

0. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ay+b}{cy+d}$, $a,b,c,d \in R$ Rpta: $x=\dfrac{cy}{a}+\dfrac{ad-bc}{a^2}Ln|ay+b|+k$

1. $y(x^3\,dy + y^3\,dx) = x^3\,dy$ Rpta: $3x^2y - 2x^2 + 3y^2 = kx^2y^3$

2. $(xy + x)\,dx = (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)\,dy$, Rpta: $Ln(x^2+1) = y^2 - 2y + 4\,Ln\,|k(y+1)|$

3. $x^3e^{2x^2+2y^2}dx - y^3e^{-x^2-2y^2}dy = 0$. Rpta: $25(3x^2-1)e^{3x^2} + 9(5y^2+1)e^{-5y^2} = C$

4. $xdy + \sqrt{1+y^2}\,dx = 0$ Rpta: $x(y+\sqrt{1+y^2}) = k$

25. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(y-1)(x-2)(y+3)}{(x-1)(y-2)(x+3)}$ Rpta: $(x-1)(y+5)^5 = k(y-1)(x+3)^5$

26. $x^2y^2 - 4x^2 = (x^2y^2 - 9y^2)\dfrac{dy}{dx}$ Rpta: $x+\dfrac{9}{4}Ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right| = y + Ln\left|\dfrac{y-2}{y+2}\right| + k$

27. $(x - y^2x)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0$ Rpta: $(x^2-1)(y^2-1) = k$

28. $y^2(1-x^2)^{1/2}\,dy = arc.sen\,x\,dx$ en el intervalo $-1 < x < 1$

Rpta: $2y^3 - 3(arc.\,sen\,x)^2 = C$

29. $xy' = \sqrt{1-y^2}$ Rpta: $y = sen(Ln\,|x| + C)$

30. $xydx + (x^2+1)e^{y^2}dy = 0$ Rpta: $Ln\sqrt{x^2+1} + \int_a^x \dfrac{e^{t^2}}{t}dt = C$

31. $(x+1)(y-1)dx + (x-1)(y+1)\,dy = 0$ Rpta: $(x-1)(y-1) = ke^{\frac{-x+y}{2}}$

32. $(e^y+1)\cos x\,dx + e^y(sen\,x + 1)\,dy = 0$ Rpta: $(sen\,x + 1)(e^y + 1) = k$

33. $xy + y^2\dfrac{dy}{dx} = 6x$ Rpta: $x^2 + y^2 + 12y + 72Ln\,|6-y| = C$

34. $y\,Ln\,x\,.\,Ln\,y.\,dx + dy = 0$ Rpta: $Ln(Ln\,y) + x\,Ln\,x - x = C$

35. $(xy + 2x + y + 2)\,dx + (x^2 + 2x)\,dy = 0$ Rpta: $\sqrt{x^2+2x}\,(y+2) = k$

36. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)\,dx = 0$ Rpta: $1 + e^y = C(1+x^2)$

37. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\cos x}{sen^2\,y}$ Rpta: $2y - sen^2\,y - x - sen\,x = C$

38. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-xy-x+y}{xy-y^2}$ Rpta: $y^2 = (x-1)^2 + k$

39. $xdx - \sqrt{1-x^4}\,dy = x^2\sqrt{1+x^4}\,dy$ Rpta: $y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}+C$

40. $(1+y^2)dx = (y-\sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{3/2}dy$ Rpta: $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = Ln\left|\dfrac{C\sqrt{1+y^2}}{1+\sqrt{1+y^2}}\right|$

41. $yy' = sen\,x.e^{x+2y}$ Rpta: $2y = 2e^{x+2y}(\cos x - sen\,x) + k$

42. $(4x + xy^2)dx + (y + x^2y)dy = 0$ Rpta: $(1+x^2)(4+y^2) = k$

43. $(x + x\sqrt{y})dy + y\sqrt{y}dx = 0$ Rpta: $-\dfrac{2}{\sqrt{y}} + \ln xy = c$

44. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2y-y}{y+1}$; $y(3) = 1$. Rpta: $x^3 - 3x - 3y - 3\ln|y| = 21$

45. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-6x^2y^2}{y-x^3y}$; $y(3) = 1$ Rpta: $(x^3-1)^4 = k(2y^2-1)$

II. **Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial, mediante las condiciones dadas:**

1. $sen\,2x\,.\,dx + \cos 3y\,dy = 0$, $y(\pi/2) = \pi/3$ Rpta: $2\,sen\,3y - 3\cos 2x = 3$

2. $y' - 2y\,.\,ctg\,x = 0$, $y(\pi/2) = 2$ Rpta: $y = 2\,sen^2\,x$

3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}-\dfrac{x}{1+y}$, $y(0) = 1$ Rpta: $3y^2 + 2y^3 = 3x^2 + 5$

4. $x(y^6+1)dx + y^2(x^4+1)dy = 0,\ y(0)=1$ Rpta: $3arc.\text{tg}\, x^2 + 2arc.\text{tg}\, y^3 = \frac{\pi}{2}$

5. $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\text{sen}\, y}} + y' = 0,\ y(\frac{\pi}{4}) = 0$ Rpta: $\sqrt{2}\,\text{sen}\, x + \text{sen}\, y - \cos y = 0$

6. $y^2\, y' - x^2 = 0,\ y(-2) = -2,$ Rpta: $y = x$

7. $x^3\, dy + xy\, dx = x^2\, dy + 2y\, dx,\ y(2) = e$ Rpta: $xy = 2(x-1)e^{2/x}$

8. $\frac{dy}{dx} = xy^3(1+x^2)^{-1/2},\ y(0)=1$ Rpta: $y = (3 - 2\sqrt{1+x^2})^{-1/2}$

9. $y'\,\text{sen}\, x = y\, \text{Ln}\, y,\ y(\pi/2) = e$ Rpta: $y = e^{\text{tg}\, x/2}$

10. $(1+e^x)\, y\, .\, y' = e^x,\ y(0) = 1$ Rpta: $2e^{y^2/2} = \sqrt{e}(1+e^x)$

11. $(xy^2 + x)\, dx + (x^2\, y - y)\, dy = 0,\ y(0) = 1$ Rpta: $1 + y^2 = \frac{2}{1-x^2}$

12. $(4x + xy^2)dx + (y + x^2\, y)\, dy = 0,\ y(1) = 2$ Rpta: $(1+x^2)(4+y^2) = 16$

13. $xdx + y\, e^{-x}\, dy = 0,\ y(0) = 1$ Rpta: $y = [2(1-x)e^x - 1]^{1/2}$

14. $ye^{y^2}\, y' = x - 1,\ y(2) = 0$ Rpta: $e^{y^2} = x^2 - 2x + 1$

15. $y' + 6y\, .\, \text{tg}\, 2x = 0,\ y(0) = -2,$ Rpta: $y = -2\cos^3 2x$

16. $y'\, x\, \text{Ln}\, x - y = 0,\ y(2) = \text{Ln}\, 4$ Rpta: $y = 2\, \text{Ln}\, x$

17. $(1+e^x)\, y\, y' = e^y,\ y(0) = 0$ Rpta: $(1+y)e^{-y} = Ln(\frac{1+e^x}{2}) + 1 - x$

18. $2ydx + x^2 dy = -dx,\ y(\frac{1}{Ln^2}) = 7/2$ Rpta: $2y + 1 = 2\, e^{2/x}$

19. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{\text{sen}\theta + e^{2r}\,\text{sen}\theta}{3e^r + e^r\cos\theta},\ r(\pi/2) = 0$ Rpta: $2\, \text{arc.tg}\, (e^r) + \text{arc.tg}\, (\cos\theta) = \pi/2$

20. $4dy + y\, dx = x^2\, dy,\ y(4) = -1,$ Rpta: $(2+x)\, y^4 - 3x + 6 = 0$

21. $dy = x\, (2ydx - xdy),\ y(1) = 4$ Rpta: $y = 2x^2 + 2$

22. Hallar y si:

a) $\int_a^x ydx = K(y^3 - b^3)$ Rpta: $3\, Ky^2 - 2x = 3\, Kb^2 - 2a$

b) $\int_a^x ydx = K(y-b)$ Rpta: $y = b\, e^{(x-a)/K}$

c) $\int_a^x ydx = K(y^2 - b^2)$ Rpta: $y = (2K)^{-1}(x - a \pm 2\, K\, b)$

d) $\int_a^x y^2 dx = K(y-b)$ Rpta: $y\,(x - a - K/b) + K = 0$

e) $\int_a^x y^2 dx = K(y^2 - b^2)$ Rpta: $x - a = 2\, K\, \text{Ln}\, (y/b)$

f) $\int_a^x x^2 dy = x^3(y-b)$ Rpta: $(2y - 3b)\, x^2 = -a^2 b$

g) $\int_a^x x^6 y^2 dx = x^7(y^2 - b^2)$ Rpta: $(6y^2 - 7b^2)x^6 + a^6 b^2 = 0$

2.2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Reducibles a Variable Separable.

Demostración:

$z = ax + by + c$

Las ecuaciones diferenciales de la forma siguiente:

$z - ax - c = by$

$\Rightarrow by = z - ax - c$

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \ldots . (1)$$

$b\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - a \cdot \cancel{\frac{dx}{dx}}$

donde a, b y c son constantes, no son de variable separable.

$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right)}$

Para resolver estas ecuaciones diferenciales, se transforma en una ecuación diferencial de variable separable, mediante la sustitución; z = ax + by + c, de donde $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a)$, que al reemplazar en la ecuación (1), se obtiene una nueva ecuación diferencial, que es de variable separable.

es decir: $\frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a) = f(z)$, de donde $\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$, separando la variable

$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx$ ecuación de variable separable.

Ejemplos: Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

$(x+y)^2\, y' = a^2$

Solución

$y = z - x$

Sea $z = x + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$z^2(\frac{dz}{dx} - 1) = a^2$, separando la variable $\frac{z^2\,dz}{z^2 + a^2} = dx$, integrando ambos miembros.

$\int \frac{z^2\,dz}{z^2 + a^2} = \int dx + C \Rightarrow z - a\,arc.tg(\frac{z}{a}) = x + C$, de donde

$x + y - a.\text{arctg}(\frac{x+y}{a}) = x + C$, simplificando se tiene:

$\therefore$ x + y = a . tg (y/a +k)

$y' = \cos^2(ax + by + c)$, a , b constantes positivas y diferentes.

Solución

Sea z = ax + by + c $\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + by'$, de donde $y' = \frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a)$, reemplazando en la ecuación $\frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a) = \cos^2 z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b\cos^2 z$,

separando las variables se tiene: $\frac{dz}{a + b\cos^2 z} = dx$, integrando se tiene:

$$\int \frac{dz}{a + b\cos^2 z} = \int dx + k \Rightarrow \int \frac{dz}{a\,\text{sen}^2 z + (a+b)\cos^2 z} = x + k$$

$$\frac{1}{a}\int \frac{\sec^2 z\,dz}{\text{tg}^2 z + \frac{a+b}{a}} = x + k \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a(a+b)}}\,\text{arctg}\sqrt{\frac{a}{a+b}}\,\text{tg}(ax + by + c) = x + k$$

3) $y' + 1 = \frac{(x+y)^m}{(x+y)^n + (x+y)^p}$

Solución

Sea z = x + y $\Rightarrow y' = \frac{dz}{dx} - 1$, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$\frac{dz}{dx} - 1 + 1 = \frac{z^m}{z^n + z^p} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z^m}{z^n + z^p}$, separando las variables

$\frac{z^n + z^p}{z^m}\,dz = dx$, integrando se tiene:

$$\int \frac{z^n + z^p}{z^m}\,dz = \int dx + C \Rightarrow \frac{z^{n-m+1}}{n-m+1} + \frac{z^{p-m+1}}{p-m+1} = x + C$$

$$\therefore \quad \frac{(x+y)^{n-m+1}}{n-m+1} + \frac{(x+y)^{p-m+1}}{p-m+1} = x + C,\ n - m \neq -1,\ p - m \neq -1$$

4) $xy^2(xy' + y) = a^2$

$z = xy$

Solución

Sea $z = xy \Rightarrow y = \frac{z}{y} \Rightarrow y' = \frac{x\frac{dz}{dx} - z}{x^2}$ reemplazando en la ecuación diferencial

dada. $\frac{z^2}{x}\left[x\frac{(x\frac{dz}{dx} - z)}{x^2} + \frac{z}{x}\right] = a^2$, simplificando. z^2 dz = a^2 x dx,

integrando se tiene: $\frac{z^3}{3} = a^2\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow 2x^3y^3 = 3a^2x^2 + K$

5) (Ln x + y^3) dx - 3xy^2 dy = 0

Solución

Sea $z = Lnx + y^3 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} + 3y^2.y'$, de donde $3xy^2y' = x\frac{dz}{dx} - 1$, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene: $z - (x\frac{dz}{dx} - 1) = 0 \Rightarrow (z+1) - x\frac{dz}{dx} = 0$, separando las variables. $\frac{dx}{x} - \frac{dz}{z+1} = 0$, integrando se tiene:

$\text{Ln } x - \text{Ln}(z+1) = \text{Ln } C \Rightarrow x = C(z+1)$

$z + 1 = kx \Rightarrow \text{Ln } x + y^3 + 1 = kx$ donde $k = \frac{1}{c}$

$\therefore\ y^3 = kx - \text{Ln}x - 1$

6) $(6x + 4y + 3)\,dx + (3x + 2y + 2)dy = 0$

Solución

La ecuación diferencial expresaremos en la forma:

$(2(3x + 2y) + 3)dx + (3x + 2y + 2)dy = 0$

Sea $z = 3x + 2y \Rightarrow dz = 3\,dx + 2y \Rightarrow dy = \frac{1}{2}(dz - 3dx)$

reemplazando en la ecuación diferencial $(2z + 3)dx + (z + 2)\left(\frac{dz - 3dx}{2}\right) = 0$

simplificando y separando la variable se tiene $dx + \frac{z+2}{z}dz = 0$,

integrando ambos miembros $z + 2\,\text{Ln } z + x = C$ de donde:

$\therefore\ 4x + 2y + 2\text{Ln}(3x + 2y) = C$

7) $\text{Cos}(x + y)dx = x\,\text{sen}(x + y)\,dx + x\,\text{sen}(x + y)dy$

Solución

Sea $z = x + y \Rightarrow dx = dz - dx$, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene: $\cos z\,dx = x\,\text{sen } z\,dx + x\,\text{sen } z\,(dz - dx)$, simplificando y separando la variable. $\frac{dx}{x} = \text{tg}\,z dz$, integrando se tiene: $\therefore\ x\cos(x + y) = C$

Ejercicios Propuestos:

3) Rpte: $\frac{1}{2}\left(x+y+\ln|x+y+1|\right) = x+$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $\frac{dy}{dx} = \cos.(x + y)$ — Rpta: $y = 2\,\text{arc.tg}(x + C) - x$

2. $y' = \text{sen}^2(x - y + 1)$ — Rpta: $\text{tg}(x - y + 1) = x + C$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x+y+2}$ — ~~Rpta: $y + \text{Ln}|x + y + 1| = x + C$~~

4. $y'\ln|x - y| = 1 + \ln|x - y|$ — Rpta: $(x - y)\,\text{Ln}|x - y| = C - y$

5. $y' = (x + y)^2$ — Rpta: $x + y = \text{tg}(x + C)$

6. $(x + y - 1)dx + (2x + 2y - 3)\,dy = 0$ — Rpta: $x + 2y + \text{Ln}|x + y - 2| = C$

7. $(1 + x^2y^2)y + (xy - 1)^2xy' = 0$ sug : $xy = z$ — Rpta: $cy^2\,e^{xy - 1/xy}$

8. $(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - y^3 + 4x^2y)dx + (xy^2 - 4x^3)\,dy = 0$,

   sug : $y = xz$ — Rpta: $\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + \frac{y^3}{3x^3} - \frac{4y}{x} = C$

9. $y' = \frac{y - x + 1}{y - x + 5}$ — Rpta: $(y - x)^2 + 10y - 20x = C$

10. $ye^{x/y^2}dx + (y^2 - 2xe^{x/y^2})dy = 0$ — Rpta: $Lny + e^{x/y^2} = C$

11. $y' = \text{sen}(x - y)$ — Rpta: $x + C = \text{ctg}\left(\frac{y - x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

12. $y' = (8x + 2y + 1)^2$ — Rpta: $8x + 2y + 1 = 2\,\text{tg}(4x + C)$

13. $(x^2y^3 + y + x - 2)dx + (x^3y^2 + x)\,dy = 0$ — Rpta: $3x^2 - 12x + 2x^3y^2 + 6xy = C$

14. $(1 - xy\cos xy)dx - x^2\cos xy\,.\,dy = 0$ — Rpta: $\text{Ln } x - \text{sen } xy = C$

15. $[x^2\,\text{sen}(y/x^2) - 2y\cos(y/x^2)]\,dx + x\cos(y/x^2)\,dy = 0$ — Rpta: $x\,\text{sen}(y/x^2) = C$

16. $e^y y' = K(x + e^y) - 1$ sug : $Z = x + e^y$ — Rpta: $y = \text{Ln}(Ce^{Kx} - 1)$

20) Rpta: $\ln|xy-1| - \frac{1}{2}\ln|x| = c$

. $x^2yy' = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(x^2y^2) - xy^2$ sug: $z = x^2y^2$ Rpta: $\operatorname{sen}(x^2y^2) = k e^x$

. $y' = ax + by + c$, $a, b, c \in R$ Rpta: $b(ax+by+c) + a = c e^{bx}$

. $(x^2y^2+1)dx + 2x^2dy = 0$ ~~Rpta:~~ $\cancel{\frac{1}{1-xy} + \frac{1}{2}Ln\ x = C}$

0. $(xy - 2xy\,Ln^2 y + y\,Ln\,y)\,dx + (2x^2\,Ln\,y + x)\,dy = 0$

sug: $z = x\,Ln\,y$ Rpta: $2x^2 + (2x\,Ln\,y + 1)^2 = C$

1. $(2x+3y-1)dx + (4x+6y-5)\,dy = 0$ Rpta: $x + 2y + 3\,Ln\,(2x+3y-7) = C$

2. $(2x-y)dx + (4x-2y+3)\,dy = 0$ Rpta: $5x + 10y + C = 3\,Ln|10x-5y+6|$

3. $(6x+3y-5)dx - (2x+y)\,dy = 0$ Rpta: $3x - y = C + Ln\,(2x+y-1)$

4. $(x^3y^4 + y^5x^5 + x^5y^2 + x^3y^5 + y^7 + y^5)\,dx - (x^4y^3 + x^6y + xy^6)\,dy = 0$

Rpta: $\frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{2x^2} - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{x}{y} + \frac{x^3}{3y^3} = C$

25. Mediante una sustitución adecuada reducir la ecuación diferencial.
$p(x^my^n)\,y\,dx + Q(x^my^n)\,x\,dy = 0$, a una ecuación diferencial de variable separable.

26. $(2 + 4x^2\sqrt{y})y\ dx + x^3\sqrt{y}\ dy = 0$ Rpta: $x^3y^{1/2} = C$

27. $y(xy+1)dx + x(1 + xy + x^2y^2)\,dy = 0$ Rpta: $\frac{2xy+1}{2x^2y^2} = LnKy$

28. $(y - xy^2)dx - (x + x^2y)\,dy = 0$ Rpta: $Ln(\frac{x}{y}) - xy = C$

29. $(y - xy^2 + x^2y^3)\,dx + (x^3y^2 - x^2y)\,dy = 0$ Rpta: $2\,Ln\,x + x^2y^2 - 2xy = K$

30. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+xy^3}{1+x^3y}$ sug: $x + y = u$, $x\,y = v$ Rpta: $x^2y^2 - 1 = K(x+y)^2$

31. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{2y - xe^y}$ Rpta: $y^2 = x\,e^y + C$

32. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\ (x+y)$ Rpta: $x - y - Ln\ |\operatorname{sen}(x+y) + \cos(x+y)\ | = C$

33. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{Ln(2x+y+3)+1} - 2$ Rpta: $(2x+y+3)\ Ln\ |2x+y+3| = x + C$

34. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y - 1$, sug: $z = x^2 + 2x + y$ Rpta: $2x + x^2 + y + 1 = K\,e^x$

35. $(x^2 - y^4)\frac{dy}{dx} = xy$, sug: $x = uy$ Rpta: $2\,y^5 = -3x^2 + K\,y^2$

36. $(3x - 2y + 1)dx + (3x - 2y + 3)\,dy = 0$ Rpta: $5(x+y+C) = 2\,Ln\,|\,15x - 10y + 11\,|$

37. $y' = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x+2y)$ Rpta: $4y - 2x + \operatorname{sen}\,(2x+4y) = C$

38. $y' = \sqrt{2x+3y}$ Rpta: $6\sqrt{2x+3y} - 4Ln(3\sqrt{2x+3y}+2) - 9x = C$

39. $y' = \sqrt{y + \operatorname{sen}x} - \cos x$, $sug.$ $z = \sqrt{y + \operatorname{sen}x}$ Rpta: $\sqrt{y + \operatorname{sen}x} = \frac{x}{2} + C$

40. $\sqrt{x+y+1}\ \ y' = \sqrt{x+y-1}$

Rpta: $u^2 + 2u - u\sqrt{u^2-1} + Ln\ \left|u + \sqrt{u^2-1}\right| = 4x + C;\ \ u = x + y$

41. $(x + y - 2 + \frac{1}{x})dx + (2 - x - y)dy = 0$ Rpta: $2\,Ln\,x - 4x + 4y - (x+y)^2 = k$

42. $(2x - 2y + xe^x)dx - (2x - 2y - 1)\,dy = 0$ Rpta: $(x-1)e^x + (x - y)^2 + y = C$

43. $[\operatorname{sen}x - \operatorname{tg}(x-2y)]\,dx + 2\operatorname{tg}(x-2y)\,dy = 0$ Rpta: (+) $\cos x$ (−) $Ln\cos(x-2y) = C$

44. $(1 - xy + x^2y^2)dx + (x^3y - x^2)\,dy = 0$ Rpta: $2\,Ln\,x + x^2y^2 - 2xy = C$

45. $(y^5 arc.\operatorname{sen}\sqrt{\frac{x}{1+x}} - y^4 arc.\operatorname{tg}\sqrt{x})dx + dy = 0$

Rpta: $\sqrt{x}\ \ arc.\operatorname{tg}\sqrt{x} - Ln\sqrt{1+x} + Ln(\frac{y-1}{y}) + \frac{6y^2+3y+2}{6y^3} = C$

46. $2yy' = y^2 + x^2 - 2x$ Rpta: $y^2 = c\,e^x - x^2$

47. $y' + \operatorname{sen}^2(x+y) = 0$ Rpta: $\operatorname{tg}(x+y) = x + C$

48. $y' = (x+y)\ln(x+y) - 1$ Rpta: $Ln\ |x+y| = c\,e^x$

49. $2(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2})dx + x^3dy = 0$ Rpta: $x^2(x^2y + \sqrt{1+x^4y^2}) = C$

50. $y^2 arc.\operatorname{tg}x + y^3 arc.\sec\sqrt{x^2+1} + \frac{dy}{dx} = 0$

$xy\,(x\,dy + y\,dx) = 6y^3\,dy$, cuando $x = 2$, $y = 1$

sug. $z = xy$ Rpta: $y^2(x^2 - 3y^2) = 1$

$x^2(x\,dx + y\,dy) = (x^2 + y^2)\,dx$, cuando $x = 1$, $y = 2$

sug. $z = x^2 + y^2$ Rpta: $(x^2 + y^2)(10 - 9x) = 5x$

$dx + dy = (x + y)(1 + y/x)^2(x\,dy - y\,dx)$

sug. $z = x + y$, $\omega = y/x$ Rpta: $(2y + cx)(x + y)^2 + x = 0$

$(x^2 + y^2)(x\,dy + y\,dx) - xy\,(x\,dy + y\,dx) = 0$

sug. $z = x^2 y^2$, $\omega = xy$ Rpta: $x^2 y^2 = C\,(x^2 + y^2)$

$y^2(x^2 + 2)\,dx + (x^3 + y^3)(y\,dx - x\,dy) = 0$ Rpta: $\frac{1}{x^2} - \frac{x}{y} + \frac{y^2}{2x^2} - Lnx = C$

$(6x - 3y + 2)dx - (2x - y - 1)\,dy = 0$ Rpta: $3x - y + C = 5\,Ln\,|2x - y + 4|$

$\frac{dy}{dx} = (x + y - 3)^2 - 2(x + y - 3)$ Rpta: $\frac{1}{x + y - 4} = x + C$

$\frac{dy}{dx} = -2 + e^{2x-y+1}$ Rpta: $x + e^{-2x-y+1} = C$

$x\,dy = y\,(xy + \cos\pi)\,dx$

60. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2x - 3y + 4}{3x - 2y - 1}\right)^2$

1. $(1 - x^2 y)\,dx + x^2(y - x)dy = 0$ sug. $z = x - y$

Rpta. $y^2 - 2xy + 2x^2 + \frac{2}{x} = k$

2. $y' = (8x + 2y)^2 + 2(8x + 2y) + 1$ Rpta: $\text{arc tg}\,(4x + y) = 4x + k$

.3. Otras Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

$\cos y' = 0$

Solución

Como $\cos y' = 0 \Rightarrow y' = \text{arc cos } 0 = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{2}(2n+1) \Rightarrow dy = \frac{\pi}{2}(2n+1)dx$, integrando

$\int dy = \int \frac{\pi}{2}(2n+1)dx + K$, de donde se tiene:

$$y = \frac{\pi}{2}(2n+1)x + K,\ n \in z$$

2. $e^{y'} = 1$

Solución

$e^{y'} = 1$, tomando logaritmo se tiene $y' = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = C$, C constante

3. $Ln\,y' = x$

Solución

$Ln\,y' = x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow dy = e^x\,dx$

integrando $\int dy = \int e^x dx + C$ de donde se tiene: $y = e^x + C$

4. $x^2 y' \cos y + 1 = 0,\ y \to \frac{16\pi}{3};\ x \to +\infty$

Solución

$x^2 y' \cos y + 1 = 0 \Rightarrow \cos y . y' + \frac{1}{x^2} = 0$

$\cos y . dy + \frac{dx}{x^2} = 0$, integrando

$\int \cos y\ dy + \int \frac{dx}{x^2} = C$. de donde se tiene:

$\text{sen}\,y - \frac{1}{x} = C$, como $y \to \frac{16\pi}{3}$ *cuando* $x \to +\infty$

$\Rightarrow C = \text{sen}\frac{16\pi}{3}$, por lo tanto: $\text{sen}\,y - \frac{1}{x} = \text{sen}\,(\frac{16\pi}{3})$

5. $\text{tg}\,y' = x$

Solución

Como $\operatorname{tg} y' = x \Rightarrow y' = \operatorname{arc.tg} x + n\pi, \quad n \in Z$

$dy = (\operatorname{arc.tg} x + n\pi)\,dx$, integrando.

$\int dy = \int (\operatorname{arc.tg} x + n\pi)\,dx + C$, de donde se tiene:

$$y = x \ \operatorname{arc.tg} x - \frac{1}{2}Ln(1+x^2) + n\ \pi\ \ x + C$$

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $e^{y'} = x$ — Rpta: $y = x\,(Ln\,x - 1) + C$

2. $\operatorname{tg} y' = 0$ — Rpta: $y = \pi n x + C$

3. $e^y = e^{4y}\,y' + 1$, y es acotada para $x \to +\infty$ — Rpta: $y = 0$

4. $\operatorname{sen} y' = x$ — Rpta: $y = x\ \operatorname{arc.sen} x - \sqrt{1-x^2} + n\ \pi\ \ x, n \in z$

5. $x^2 y' + \cos 2y = 1,\ y \to \frac{16\pi}{3}$, *cuando* $x \to +\infty$

   Rpta: $y = \operatorname{arc.tg}\ (\frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}) + 3\pi$

6. $(x + 1)\,y' = y - 1$, y es acotada, para $x \to +\infty$ — Rpta: $y = 1$

7. $y' = 2x\,(\pi + y)$, y es acotada, para $x \to \infty$ — Rpta: $y = -\pi$

8. $x^3 y' - \operatorname{sen} y = 1,\ \ y \to 5\pi,\ \ x \to \infty$ — Rpta: $y = 2\operatorname{arc.tg}\ (1 - \frac{1}{2x^2}) + \frac{9}{2}\pi$

9. $y = Ln\ (\frac{dy}{dx})$ — Rpta: $y = -\,Ln\,(C - x)$

10. $(1+x^2)y' - \frac{1}{2}\cos^2 2y = 0,\ \ y \to \frac{7}{2}\pi,\ \ x \to -\infty$

    Rpta: $y = \frac{1}{2}\operatorname{arc.tg}\ (\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc.tg} x) + \frac{7}{2}\pi$

2.4. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Homogéneas.

a. Función Homogénea: Diremos que la función f (x,y) es homogénea de grado k x e y, sí y solo si, cumple con la condición siguiente:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^K f(x,y)$$

Ejemplo: Determinar cuales de las siguientes funciones son homogéneas.

1. $f(x,y) = x^2 y - 4y^3$ es homogénea de grado 3 en x e y

2. $f(x,y) = y^2 \operatorname{tg}\,(\frac{x}{y})$ es homogénea de grado 2 en x e y.

3. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$ es homogénea de grado 1 en x e y

4. $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ es homogénea de grado cero en x e y

5. $f(x,y) = x^2 + \operatorname{sen} x.\cos y$, no es homogénea.

6. $f(x,y) = e^x$, no es homogénea.

b. Ejercicios Propuestos:

Determinar si las siguientes funciones son homogéneas o no.

1. $f(x,y) = e^{x/y}$ 2. $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$

3. $f(x,y) = x - 5y + 6$ 4. $f(x,y) = x \operatorname{sen} y/x - y \operatorname{sen}\frac{x}{y}$

5. $f(x,y) = \frac{yx^2 + xy^2}{3x^2 - 4y^3}$ 6. $f(x,y) = x^3 - xy + y^3$

7. $f(x,y) = x\,Ln\,x - y\,Ln\,y$ 8. $f(x,y) = x\,Ln\,x - x\,Ln\,y$

$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{2x/y} + 4xy$ 10. $f(x,y) = x \operatorname{arctg}(y/x) + y \operatorname{arctg}(\frac{x}{y})$

Definición:

Diremos que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de primer grado de la forma:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

es homogénea si M y N son funciones homogéneas del mismo grado en x e y.

Ejemplo: Las siguientes ecuaciones diferenciales ordinaria son homogéneas.

$(x^3 - y^3)\,dx + y^2 x\,dy = 0$

$x\dfrac{dy}{dx} = y + 2xe^{-y/x}$

$(x^3 + y^2\sqrt{x^2 + y^2})dx - xy\sqrt{x^2 + y^2}\,dy = 0$

$(\sqrt{x^2 - y^2} - y \ \operatorname{arcsen}(y/x))dx = x\cos(y/x)dy$

Solución de una Ecuación Diferencial Homogéneas.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria homogénea.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)dy = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

entonces: $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^K M(x,y)$ y $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^K N(x,y)$ ... (2)

esto es porque la ecuación diferencial (1) es homogénea, haciendo: $\lambda = \dfrac{1}{x}$ en la ecuación (2) se tiene:

$M(1, y/x) = \dfrac{1}{x^K} M(x,y) \Rightarrow M(x,y) = x^K M(1, y/x)$

$M(x,y) = x^K M(1,y/x) = x^K M(1,u) = x^K \psi(u)$, donde $u = y/x$

es decir: $M(x,y) = x^K \varphi(u)$, $u = y/x$ .... (3)

$N(1, y/x) = \dfrac{1}{x^K} N(x,y) \Rightarrow N(x,y) = x^K N(1,y/x)$

$N(x,y) = x^K N(1, (y/x)) = x^K N(1,u) = x^K \psi(u)$, $u = y/x$

es decir: $N(x,y) = x^K \psi(u)$, $u = y/x$ .... (4)

como $y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du$ .... (5)

reemplazando (3), (4), (5) en (1) se tiene:

$x^K \varphi(u)dx + x^K \psi(u)(u\,dx + x\,du) = 0$, simplificando

$\varphi(u)dx + \psi(u)(u\,dx + x\,du) = 0$, agrupando y separando la variable se tiene:

$\dfrac{dx}{x} + \dfrac{\psi(u)}{\varphi(u) + u\psi(u)}du = 0$, que es una ecuación diferendial de variable separable.

Análogamente se hace para $\lambda = \dfrac{1}{y}$, $u = \dfrac{x}{y}$

Ejercicios Desarrollados

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2\,dy = 0$

Solución

Sea $y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du$
reemplazando en la ecuación diferencial.

$(x^2 + 3x^2u + x^2u^2)dx - x^2(u\,dx + x\,du) = 0$. simplificando

$x^2(u^2 + 2u + 1)dx - x^3du = 0$. para $x \neq 0$ se tiene:

$(u^2 + 2u + 1)dx - x\,du = 0$,

separando la variable $\dfrac{dx}{x} - \dfrac{du}{(u+1)^2} = 0$, integrando

se tiene: $\displaystyle\int\frac{dx}{x} - \int\frac{du}{(u+1)^2} = C$, de donde $Lnx + \dfrac{x}{y+x} = C$

2. $x\frac{dy}{dx} = y+\sqrt{y^2-x^2}$

Solución

A la ecuación diferencial dada expresaremos así:

$(y+\sqrt{y^2-x^2})dx - xdy = 0$.............(1)

Sea $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$ ....(2)

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$(ux+\sqrt{u^2x^2-x^2})dx - x(udx+xdu) = 0$, agrupando se tiene:

$x\sqrt{u^2-1}dx - x^2du = 0$, para $x \neq 0$ y además $u \neq \pm 1$, se tiene: $\frac{dx}{x}-\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = 0$,

integrando $\int\frac{dx}{x}-\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = k$, efectuando y simplificando: $2Cy = C^2x^2 + 1$

3. $(x - y\,Lny + yLnx)dx + x(Lny - Lnx)dy = 0$

Solución

A la ecuación diferencial podemos escribir en la forma:

$(x - y\,Ln(y/x))dx + x\,Ln(y/x)dy = 0$ ... (1)

Sea $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$ ...... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$(x - ux\,Lnu)dx + x\,Ln(u)(udx + xdu) = 0$, agrupando y simplificando

$dx + x\,Ln(u)du = 0$, separando la variable: $\frac{dx}{x} + Ln(u)du = 0$,

integrando $\int\frac{dx}{x}+\int Ln(u)du = C$,

efectuando y simplificando $(x - y)Lnx + y\,Lny = Cx + y$

4. $(x - y\,arc.tg(y/x))dx + x\,arc.tg(y/x)dy = 0$

Solución

Sea $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:
$(x - ux\,arc\,tgu)dx + x\,arc\,tgu\,(udx + xdu) = 0$

simplificando y separando las variables se tiene:

$\frac{dx}{x} + \operatorname{arctg} u\,du = 0$, integrando

$\int\frac{dx}{x}+\int arc\,tgu\,du = LnC \Rightarrow Lnx + u\,arc\,tg\,u - \frac{1}{2}Ln(1+u^2) = LnC$

Como $u = y/x$ entonces $2y\,arc.tg(y/x) = x\,Ln(\frac{x^2+y^2}{x^4})C^2$

5. $xe^{x/y}dx + ye^{y/x}dy = 0$

Solución

Sea $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$, reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene: $xe^{1/u}dx + uxe^u(udx + xdu) = 0$, agrupando y simplificando $(e^{1/u} + u^2e^u)dx + xue^u du = 0$, separando la variable.

$\frac{dx}{x}+\frac{ue^u du}{e^{1/u}+u^2e^u} = 0$, integrando.

$Lnx = -\int_a^u \frac{te^t dt}{e^{1/t}+t^2e^t}$ como $u = y/x$ entonces $\therefore Lnx = -\int_a^{y/x}\frac{te^t dt}{e^{1/t}+t^2e^t}$

6. $(y\cos(y/x) + x\,sen(y/x))dx = \cos(y/x)dy$

Solución

Sea $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$, reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene: $(ux\cos u + x\,sen u)dx = x\cos u(udx + xdu)$.

Agrupando y simplificando, se tiene:

$sen\,udx = x\cos u\,du$, separando la variable

$\frac{dx}{x} = ctgu\,du$ integrando.

$$\int \frac{dx}{x} = \int c\operatorname{tg} u \, du + Ln\ k \Rightarrow Ln\ x = Ln \operatorname{sen} u + Ln\ k$$

x = k sen u, como u = y/x $\Rightarrow$ x = k sen y/x

e. Ejercicios Propuestos

I. Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

1. $(4x^2 + xy - 3y^2)dx + (-5x^2 + 2xy + y^2)\,dy = 0$

   Rpta: $Ln\ x + \frac{2}{3} Ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| + \frac{3}{4} Ln\left|\frac{y}{x} - 2\right| - \frac{5}{12} Ln\left|\frac{y}{x} + 2\right| = c$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\phi(y/x)}{\phi'(y/x)}$ Rpta: $x = k\,\phi(y/x)$

3. $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$ Rpta: $16xy = (y \pm 4x - cx^2)^2$

4. $(x \operatorname{cosec}(y/x) - y)\,dx + x\,dy = 0$ Rpta: $Ln\,k\,x = \cos(y/x)$

5. $xy' = y + 2x\,e^{-y/x}$ Rpta: $Ln(x^2 k) = e^{y/x}$

6. $dy = (y/x - \operatorname{cosec}^2 y/x)\,dx$ Rpta: $2y - x \operatorname{sen}\left(\frac{2y}{x}\right) + 4x\,Ln\,x = k\,x$

7. $2(2x^2 + y^2)dx - xy\,dy = 0$ Rpta: $x^4 = c^2(4x^2 + y^2)$

8. $x^2 y' = 4x^2 + 7xy + 2y^2$ Rpta: $x^2(y + 2x) = c(y + x)$

9. $y\,dx = (x + \sqrt{y^2 - x^2})dy$ Rpta: $\operatorname{arc\,sen}(x/y) = Ln(ky)$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^3 - y^3)}{x(2x^3 - 3y^3)}$ Rpta: $y^3 = cx\,e^{-2x^3/3y^3}$

11. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$ Rpta: $y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$

12. $y(x^2 + xy - 2y^2)\,dx + x(3y^2 - xy - x^2)\,dy = 0$ Rpta: $2y^2\,Ln(y^3/x^2) + 2xy + x^2 = cy^2$

13. $xy^2\,dy + (x^3 - y^3)\,dx = 0$ Rpta: $y^3 = -3x^3\,Ln\,x + cx^3$

14. $(6x^2 - 7y^2)dx - 14xy\,dy = 0$ Rpta: $2x^3 - 7xy^2 = c$

15. $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$ Rpta: $c(y^2 - x^2) = y^3$

16. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$ Rpta: $y + \sqrt{y^2 - x^2} = cx^3 e^{\frac{y(y + \sqrt{y^2 - x^2})}{x^2}}$

17. $ax^2 + 2bxy + cy^2 + y'(bx^2 + 2cxy + f y^2) = 0$

    Rpta: $f y^3 + 3cxy^2 + 3bx^2 y + ax^3 = k$

18. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$ Rpta: $\sqrt{\frac{x}{y}} + Ln\,y = c$

19. $(x\sqrt{x^2 + y^2} - y^2)dx + xy\,dy = 0$ Rpta: $x\ Ln|x| + \sqrt{x^2 + y^2} = cx$

20. $(x + (x - y)e^{y/x})dx + xe^{y/x}\,dy = 0$ Rpta: $x(1 + e^{y/x}) = k$

21. $(x + y \operatorname{sen}(y/x))dx - x \operatorname{sen}(y/x)dy = 0$ Rpta: $Ln\,x + \cos(y/x) = c$

22. $x^3 y' = y^3 + 3xy^2 + 4x^2 y + x^3$ Rpta: $y = \frac{x}{\sqrt{c - 2\,Ln\,x}} - x$

23. $(2xy + x^2)y' = 3y^2 + 2xy$ Rpta: $y^2 + xy = cx^3$

24. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{sen}(y/x)$ Rpta: $\operatorname{cosec}(y/x) - \operatorname{ctg}(y/x) = kx$

25. $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$ Rpta: $y^2 = cxe^{x^2/y^2}$

26. $x^2 y' = 3(x^2 + y^2)\operatorname{arc.tg}(y/x) + xy$ Rpta: $y = x\operatorname{tg}(kx^3)$

27. $xy^2\,dy - (x^3 + y^3)dx = 0$ Rpta: $y^3 = x^3(3\,Ln\,x + c)$

28. $x \operatorname{sen}(y/x) \frac{dy}{dx} = y \operatorname{sen}(y/x) + x$ Rpta: $\cos(y/x) + Ln(cx) = 0$

29. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}$ Rpta: $y + \sqrt{y^2 - x^2} = kx^2$

30. $y^2 dx + (x\sqrt{y^2 - x^2} - xy)dy = 0$ Rpta: $y^2(x - 2c) + c^2 x = 0$

31. $2x^3 \frac{dy}{dx} + (y^3 - x^2 y) = 0$ Rpta: $xy^2 = c(x^2 + y^2)$

32. $x^2 y' - y^2 + xy = x^2$ Rpta: $y = \frac{x}{c - Ln\,x} + x$

33. $x^2 y' = y^2 + 3xy + 2x^2$ Rpta: $y = x\ tg\ (Ln\ x + c) - x$

34. $(x\ sen\ (y/x) - y\cos (y/x))\ dx + x\cos (y/x)\ dy = 0$ Rpta: $x\ sen\ (y/x) = k$

35. $y\sqrt{x^2+y^2}\,dx - x(x+\sqrt{x^2+y^2})dy = 0$

Rpta: $cx - \sqrt{x^2+y^2} = xLn(\sqrt{x^2+y^2} - x)$

36. $x\frac{dy}{dx} = y(Ln\ y - Ln\ x)$ Rpta: $Ln\ (y/x) = 1 + cx$

37. $y\,dx + x\,(Ln\ (y/x) - 2)\,dy = 0$ Rpta: $y = c(1 + Ln(\frac{x}{y}))$

38. $(x\cos (y/x) + y\ sen\ (y/x))\ y\,dx + (x\cos (y/x) - y\ sen\ (y/x))\ x\,dy = 0$

Rpta: $xy\cos (y/x) = c$

39. $(x + y\,e^{y/x})\,dx - x\,e^{y/x}\,dy = 0$ Rpta: $y = x\ Ln\ (Ln\ /x/ + C)$

40. $y\,(Ln\ (y/x) + 1)\,dx - x\ Ln\ (y/x)\,dy = 0$ Rpta: $Ln\ x - \frac{1}{2}Ln^2(y/x) = c$

41. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ Rpta: $Ln\ x + c = \int\frac{(u^2+1)du}{1-u-u^2-u^3},\ u = y/x$

42. $(x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2})dx - xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy = 0$ Rpta: $(x^2+y^2)^{3/2} = x^3 Ln(kx^3)$

43. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + arc\,tg\ (y/x)$ Rpta: $Lnx = \int\frac{du}{arc\,tg\,u} + c, u = y/x$

44. $\sqrt{xy}\ \ dx = (x - y + \sqrt{xy})dy$ Rpta: $\sqrt{x-y}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = ke^{\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}$

45. $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \frac{3x^2 - y^2}{3y^2 - x^2} = 0$ Rpta: $(x^2 + y^2)^2 = k\,xy$

46. $x\cos\ (y/x)\frac{dy}{dx} = y\cos\ (y/x) - x$ Rpta: $x = k\,e^{-sen(y/x)}$

47. $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \frac{2x^3 - x^2y - y^3}{2y^3 - xy^2 - x^3} = 0$ Rpta: $x^3 + y^3 = xy\,(x + y + c)$

48. $(\sqrt{x^2-y^2} - y\,arcsen\,(y/x))dx + x\ arcsen\ (y/x)dy = 0$

Rpta: $Ln\ x + \frac{1}{2}(arcsen(y/x))^2 = k$

49. $(x\ tg\ (y/x) + y)dx - xdy = 0$ Rpta: $sen(y/x) = kx$

50. $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})dx + (\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y})dy = 0$

Rpta: $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y} = c$

51. $(2x\ tg\ y/x + y)dx = xdy$ Rpta: $x^2 = k\ sen\ (y/x)$

52. $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$ Rpta: $(x^2 + y^2)^3\,(x + y)^2 = c$

53. $x\frac{dy}{dx} - y = \frac{x}{arctg(y/x)}$ Rpta: $\frac{y}{x}arctg(y/x) = Lnk\sqrt{x^2+y^2}$

54. $xy'\ Lny/x = x + y\ Lny/x$ Rpta: $Lnx = \frac{y}{x}(Ln(y/x) - 1) + c$

55. $(x + sen\ (y/x))dx - xsen(y/x)dy = 0$ Rpta: $Lnx + \cos y/x = c$

56. $y(x^2 + xy - 2y^2)dx + x(3y^2 - xy - x^2)dy = 0$ Rpta: $2y^2\ Ln\ (y^3/x^2) + 2xy + x^2 = cy^2$

57. $(x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2})dx - xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy = 0$ Rpta: $(x^2+y^2)^{3/2} = x^3\ln cx^3$

58. $(2x\ sen\ y/x + 2x\ tg\ y/x - y\cos y/x - y\sec^2 y/x)dx + (x\cos y/x + x\sec^2 y/x)dy = 0$

Rpta: $x^2\ (sen\ y/x + tg\ y/x) = c$

59. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$ Rpta: $arctg\ y/x = Lnx + c$

60. $x(x^2 + y^2)dy = y(x^2 + y\sqrt{x^2+y^2} + y^2)dx$ Rpta: $y + \sqrt{x^2+y^2} = cx^2e^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}}$

61. $xy^3dy = (2y^4 + x^4)dx$ Rpta: $kx^8 = x^4 + y^4$

62. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - xy + y^2}$ Rpta: $(x - y)\,e^{x/y} = c$

63. $\frac{dy}{dx}=\frac{6x^2-5xy-2y^2}{6x^2-8xy+y^2}$ Rpta: $(y-x)(y-3x)^9=c(y-2x)^{12}$

64. $x\frac{dy}{dx}=y-\sqrt{x^2+y^2}$ Rpta: $y+\sqrt{x^2+y^2}=c$

65. $x\frac{dy}{dx}=y+2xe^{-y/x}$ Rpta: $e^{y/x}=\ln kx^2$

66. Demostrar que $(x+y)^{a+b}(x-y)^{a-b}=k$ es la solución de la ecuación diferencial $(ax-by)dx+(bx-ay)dy=0$

67. $(x-y)(4x+y)dx+x(5x-y)dy=0$ Rpta: $x(y+x)^2=c(y-2x)$

68. $(3x^2-2xy+3y^2)dx=4xy\,dy$ Rpta: $(y-x)(y+3x)^3=cx^3$

69. $(x-y\,\text{arc tg}\,y/x)dx+x\,\text{arc.tg}\,y/x\,dy=0$

Rpta: $2y\,\text{arc tg}\,y/x=x\,Ln\frac{c^2(x^2+y^2)}{x^4}$

70. $(y^3-x^3)dx=xy(x\,dx+y\,dy)$ Rpta: $2x^2\ln(x+y)=cx^2+2xy-y^2$

71. $4x^2+xy-3y^2+(-5x^2+2xy+y^2)\frac{dy}{dx}=0$ Rpta: $(y-x)^8(y-2x)^9=c(y+2x)^5$

72. $x^3y\frac{dy}{dx}=x^4+3x^2y^2+y^4$ Rpta: $y^2=-x^2\left(1+\frac{1}{\ln kx^2}\right)$

73. $(\sqrt{xy}-x)dx+y\,dy=0$ Rpta: $\ln x+\frac{y}{x}-2\sqrt{\frac{y}{x}}=c$

74. $xy\frac{dy}{dx}=2x^2+3xy+2y^2$ 75. $(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$

II. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas.

1. $(y-\sqrt{x^2+y^2})dx-x\,dy=0,\ y(\sqrt{3})=1$ Rpta: $x^2=9-6y$

2. $(xy'-y)\,\text{arc tg}\,(y/x)=x,\ y(1)=0$ Rpta: $\sqrt{x^2+y^2}=e^{y/x}\,\text{arc tg}\,(y/x)$

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2},\ y(1)=-1.$ Rpta: $y=-x$

4. $x\frac{dy}{dx}=x\,e^{y/x}+y,\ y(1)=0$ Rpta: $\ln x+e^{-y/x}=1$

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy-y^2}{2xy-x^2},\ y(1)=2$ Rpta: $xy(y-x)=2$

6. $(x\cos^2(y/x)-y)dx+x\,dy=0,\ y(1)=\pi/4$ Rpta: $tg\,(y/x)=Ln\,(\frac{e}{x})$

7. $y^2dx+(x^2+3xy+4y^2)dy=0,\ y(2)=1$ Rpta: $4(2y+x)\ln x=2y-x$

8. $y(x^2+y^2)dx+x(3x^2-5y^2)dy=0,\ y(2)=1$ Rpta: $2y^5-2x^2y^3+3x=0$

9. $(3x^2-2y^2)y'=2xy,\ y(0)=-1$ Rpta: $x^2=2y^2(y+1)$

10. $(x^2+2xy-2y^2)dx+(y^2+2xy-2x^2)dy=0,\ y(0)=3$ Rpta: $y^2-xy+x^2=3(y+x)$

11. $(y^2-3x^2)dy+2xy\,dx=0,\ y(0)=1$ Rpta: $y^3=y^2-x^2$

12. $\frac{dy}{dx}=\frac{y+x\cos^2(y/x)}{x},\ y(1)=\frac{\pi}{4}$ Rpta: $1+\ln x=tg\,(y/x)$

13. $\frac{dy}{dx}=\sec(y/x)+(y/x),\ y(2)=\pi$ Rpta: $y=x\,\text{arc.sen}\,(\ln 2x-1)$

14. $(x^3+y^3)dx-xy^2dy=0,\ y(1)=0$ Rpta: $y^3=3x^3\ln x$

15. $(3x^2+9xy+5y^2)dx-(6x^2+4xy)dy=0,\ y(0)=-6$

Rpta: $3x^4+4(y^2+3x-3x^2)=0$

16. $(x^2-3y^2)dx+2xy\,dy=0,\ y(2)=2,$ Rpta: $y=x\sqrt{1-\frac{3x}{8}}$

17. $(x^4+y^4)dx=2x^3y\,dy,\ y(1)=0$ Rpta: $y^2=(\frac{Ln|ex|-1}{Ln|ex|})x^2$

18. $(x^2+y^2)dx+xy\,dy=0,\ y(1)=-1$ Rpta: $x^4+2x^2y^2=3$

19. $(x^3+y^3)dx=2xy^2dy,\ y(2)=1$ Rpta: $y^3=x^3-\frac{1}{4}(7\sqrt{2xx})$

20. $\dfrac{dy}{dx} = 4 + \dfrac{y}{x} + (\dfrac{y}{x})^2, \ y(1) = 2$ Rpta: $arc.\operatorname{tg}(\dfrac{y}{2x}) - 2Ln|x| = \dfrac{\pi}{4}$

21. $x\dfrac{dy}{dx} = xe^{y/x} + y, \ y(1) = 0$ Rpta: $y = -x \ Ln \ |1 - Ln\, x|$

22. $(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)\,dx + 4xy\,(x^2 + y^2)\,dy = 0, \ y(1) = 0$

Rpta: $x^5 + 10x^3y^2 + 5xy^4 = 1$

23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}}$ Rpta: $y = k(1 + e^{(x/y)^2})$

24. $(2xy + y^2)\,dx - 2x^2\,dy = 0, \ y = e, \ x = e$ Rpta: $2x + y\,Ln\,x = 3y$

25. $(x - 3y \operatorname{sen}\dfrac{y}{x})dx + 3x \operatorname{sen}\dfrac{y}{x}\,dy = 0, \ y(1) = \dfrac{\pi}{4}$

26 Resolver la ecuación diferencial $(2x^2 + 3xy + 2y^2)\,dx - xy\,dy = 0$ de tal modo que la solución pasa por el punto P(1,0).

2.5. Ecuaciones Diferenciales Reducibles a Homogéneas.

Las ecuaciones diferenciales de la forma siguiente:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'})} \ \ldots (1)$$

No son homogéneas, porque tanto en el numerador como en el denominador aparecen dos constantes c y c', estas constantes se pueden eliminar mediante una traslación, transformando a la ecuación (1) en una ecuación diferencial homogénea, para esto consideremos las ecuaciones:

$$\boxed{L_1 : ax + by + c = 0 \ \wedge \ L_2 : a'x + b'y + c' = 0} \ldots (2)$$

donde el punto de intercepción es (h, k). Si trasladamos el origen de coordenadas al punto (h,k) las ecuaciones de (2) se transforman en:

$az + b\omega = 0 \wedge a'z + b'\omega = 0$ y haciendo el cambio $x = z + h$, $y = \omega + k$

de donde $dx = dz$, $dy = d\omega$, se tiene de (1)

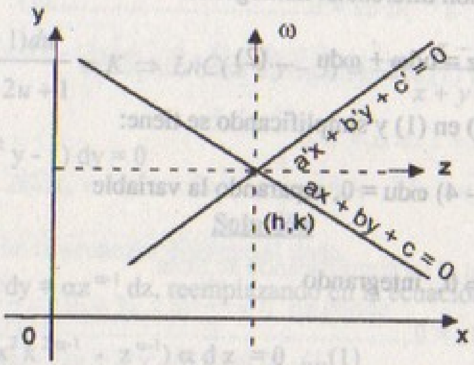
$$\frac{d\omega}{dz} = f(\frac{az + b\omega}{a'z + b'\omega}) = f(\frac{a + b(\omega/z)}{a' + b'(\omega/z)}) = F(\frac{\omega}{z}) \ldots\ldots (3)$$

que es una ecuación diferencial homogénea.

Cuando L_1: $ax + by + c = 0$; L_2: $a'x + b'y + c' = 0$, son paralelos, no se aplica este método, sin embargo se tiene: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'} \Rightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \lambda \ \Rightarrow a = \lambda a', \ b = \lambda b'$, de donde se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}) = f(\frac{\lambda(a'x + b'y) + c}{a'x + b'y + c'}) = g(a_2x + b_2y)$$

que es una ecuación diferencial reducible a variable separable.



Observación:

Otra forma de transformar a una ecuación diferencial homogénea, las ecuaciones diferenciales que no son homogéneas, es mediante la sustitución de la variable $y = Z^\alpha$, ocurriendo esto cuando todos los términos de la ecuación son del mismo grado, atribuyendo el grado 1 a la variable x, el grado α a la variable y, y el grado $\alpha - 1$ a la derivada $\dfrac{dy}{dx}$. Además se puede transformar a homogénea mediante sustituciones adecuadas de acuerdo al problema.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $(x - 4y - 9)\,dx + (4x + y - 2)\,dy = 0$

<u>**Solución**</u>

Sea $L_1: x - 4y - 9 = 0 \wedge L_2: 4x + y - 2 = 0$, como $L_1 \not\parallel L_2$ $\Rightarrow \exists p\,(h, k) \in L_1 \wedge L_2$, y para esto resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x - 4y - 9 = 0 \\ 4x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1,\quad y = -2, \text{ es decir } P(1, -2)$$

Consideremos $x = z + h$, $y = \omega + k$ de donde

$x = z + 1$, $y = \omega - 2$, además $dx = dz$, $dy = d\omega$
reemplazando en la ecuación diferencial dada:

$(x - 4\omega)\, d\omega + (4z + \omega)\, d\omega = 0$ ....(1)

que es una ecuación diferencial homogénea.

Sea $z = u\omega \Rightarrow dz = u d\omega + \omega du$ ....(2)

reemplazando (2) en (1) y simplificando se tiene:

$(u^2 + 1)\, d\omega + (u - 4)\, \omega du = 0$, separando la variable

$$\frac{d\omega}{\omega} + \frac{u-4}{u^2+1} du = 0, \text{ integrando}$$

$$\int \frac{d\omega}{\omega} + \int \frac{u-4}{u^2+1} du = C \Rightarrow Ln\omega^2 (u^2+1) - 8 \text{ arctg } u = k....(3)$$

Como $z = u\omega \Rightarrow u = \dfrac{z}{\omega} = \dfrac{x-1}{y+2}$ reemplazando en (3)

$$Ln\,[(x-1)^2 + (y+2)^2] - 8 \,\text{arctg}\left(\frac{x-1}{y+2}\right) = k$$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+3y-5}{x-y-1}$

Solución

Sean $L_1: x + 3y - 5 = 0 \wedge L_2: x - y - 1 = 0$, como $L_1 \not\parallel L_2$ entonces: $\exists\, p\,(h,k) \in L_1 \wedge L_2$, y para esto resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix} \Rightarrow p(2,1)$$

Consideremos $x = z + 2$, $y = \omega + 1$, $dx = dz$, $dy = d\omega$ ....(1)

a la ecuación diferencial dada expresaremos así:

$(x + 3y - 5)\, dx - (x - y - 1)\, dy = 0$ ....(2)

reemplazando (1) en (2) y simplificando

$(z + 3\omega)\, dz - (z - \omega)\, d\omega = 0$ ... .(3)

es una ecuación diferencial homogénea:

Sea $\omega = u z \Rightarrow d\omega = u\, dz + z\, du$, de donde al reemplazar en (3) y separando la variable, se tiene: $\dfrac{dz}{z} + \dfrac{(u-1)du}{u^2+2u+1} = 0$, integrando

$$\int \frac{dz}{z} + \int \frac{(u-1)du}{u^2+2u+1} = K \Rightarrow LnC(x+y-3) = -2\left(\frac{x-2}{x+y-3}\right)$$

3. $4xy^2\, dx + (3x^2 y - 1)\, dy = 0$

Solución

Sea $y = z^{\alpha} \Rightarrow dy = \alpha z^{\alpha-1}\, dz$, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$4x\, z^{2\alpha}\, dx + (3x^2 z^{2\alpha-1} - z^{\alpha-1})\, \alpha\, dz = 0$ ....(1)

Luego $2\alpha + 1$ es el grado de $4x\, z^{2\alpha}$
$2\alpha + 1$ es el grado de $3x^2 z^{2\alpha-1}$
$\alpha - 1$ es el grado de $z^{\alpha-1}$

y para que la ecuación (1) sea homogénea debe cumplirse:

$2\alpha + 1 = \alpha - 1 \Rightarrow \alpha = -2$, como $y = z^{\alpha} \Rightarrow y = z^{-2} \Rightarrow dy = -2\, z^{-3}\, dz$

$4x\, z^{-4}\, dx + (3x^2 z^{-2} - 1)(-2\, x^{-3})\, dz = 0$, de donde

$4\,x\,z\,dx - 2\,(3x^2 - z^2)\, dz = 0$, que es una ecuación diferencial homogénea.
Sea $z = u\,x \Rightarrow dz = u\, dx + x\, du$, reemplazando en la ecuación diferencial homogénea se tiene: $4x^2 u\, dx - 2\,(3x^2 - u^2 x^2)\,(u\, dx + x\, du) = 0$
de donde simplificando y separando la variable se tiene:

$\frac{dx}{x}+\frac{u^2-3}{u^3-u}du=0$, integrando se tiene:

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{u^2-3}{u^3-u}du = C \Rightarrow Lnx + 3\,Lnu - Ln(u^2-1) = C$$

como $u = z/x$, $y = z^{-2}$ se tiene: $y(1 - x^2 y)^2 = K$

$(y^4 - 3x^2)dy = -xydx$ ....

Solución

Sea $y = z^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$
reemplazando en la ecuación diferencial dada:

$xz^{\alpha}dx + (z^{5\alpha-1} - 3x^2 z^{\alpha-1})\alpha\, dz = 0$ ....(1)

para que la ecuación (1) sea homogénea debe cumplirse

$\alpha + 1 = 5\alpha - 1 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = 1/2$

Como $y = z^{\alpha} \Rightarrow y = z^{1/2} \Rightarrow dy = \frac{1}{2}z^{-1/2}dz$ ....(2)

reemplazando (2) en (1) y simplificando se tiene:

$2xzdx + (z^2 - 3x^2)dz = 0$ ....(3)

que es una ecuación diferencial homogénea.

Sea $z = ux \Rightarrow dz = udx + xdu$ ....(4)

reemplazando (4) en (3) simplificando y separando la variable

$\frac{dx}{x}+\frac{u^2-3}{u^3-u}du=0$, integrando

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{u^2-3}{u^3-u}du = C \Rightarrow Lnx + Ln\left(\frac{u^3}{u^2-1}\right) = C$$

como $u = z/x$, $y = \sqrt{z}$ se tiene: $\therefore\ x^2 = y^4 + Ky^6$

5. $y\cos x\,dx + (2y - \operatorname{sen}x)dy = 0$

Solución

Sea $z = \operatorname{sen} x \Rightarrow dz = \cos x\,dx$, reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene: $y\,dz + (2y - z)\,dy = 0$ ....(1)

Que es una ecuación diferencial homogénea.

Sea $y = uz \Rightarrow dy = u\,dz + z\,du$ ....(2)

reemplazando (2) en (1), simplificando y separando la variable se tiene:

$\frac{dz}{z}+\frac{2u-1}{2u^2}du = 0$, integrando

$\int\frac{dz}{z}+\int\frac{2u-1}{2u^2}du = C$, de donde $2y\,Ln\,y + \operatorname{sen}x = 2\,cy$

6. $(2x^2 + 3y^2 - 7)\,x\,dx - (3x^2 + 2y^2 - 8)\,y\,dy = 0$

Solución

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$, $v = y^2 \Rightarrow dv = 2y\,dy$.

reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$(2u+3v-7)\frac{du}{2} - (3u+2v-8)\frac{dv}{2} = 0$ de donde

$(2u + 3v - 7)\,du - (3u + 2v - 8)\,dv = 0$....(1)

Sean L_1: $2u + 3v - 7 = 0 \wedge L_2$: $3u + 2v - 8 = 0$

como $L_1 \nparallel L_2 \Rightarrow \exists\, p(h,k) \in L_1 \wedge L_2$ y para esto resolvemos el sistema siguiente

$$\begin{cases} 2u+3v-7=0 \\ 3u+2v-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u=2 \\ v=1 \end{matrix} \Rightarrow p\ (2,1)$$

Sean $u = z + 2$, $v = \omega + 1$ reemplazando en (1)

$(2z + 3\omega)\,dz - (3z + 2\omega)\,d\omega = 0$ ....(2) que es homogénea.

Sea $\omega = zn \Rightarrow d\omega = z\,dn + n\,dz$ reemplazando en (1), simplificando y separando la variable se tiene: $2\frac{dz}{z}+\frac{2n+3}{n^2-1}dn = 0$, integrando

$$\int 2\frac{dz}{z}+\int\frac{2n+3}{n^2-1}dn = K \Rightarrow Lnz^2(n^2-1)+\frac{3}{2}Ln\left|\frac{n-1}{n+1}\right| = K$$

como $n=\frac{\omega}{z}, \omega = v-1 = y^2-1,\ z = u-2 = x^2-2$

$$\therefore\quad Ln\left|y^4-x^4+4x^2-2y^2-3\right|+\frac{3}{2}Ln\left|\frac{y^2-x^2+1}{y^2+x^2-3}\right| = K$$

Ejercicios propuestos.

I. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+4}{x-y-6}$ Rpta: $\operatorname{arctg}(\frac{y+5}{x-1}) = Ln\sqrt{(x-1)^2+(y+5)^2}+C$

2. $(x - 2y + 5)dx + (2x - y + 4)dy = 0$ Rpta: $y - x - 3 = K(x + y - 1)^3$

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{x-y+1}$ Rpta: $\operatorname{arctg}(\frac{y-1}{x}) = Ln\sqrt{x^2+(y-1)^2}+C$

4. $(x + y^3) + 6xy^2 y' = 0$ Rpta: $y^3 = -\frac{x}{3}+cx^{-1/2}$

5. $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0$ Rpta: $(x - 1)(3x + 2y - 1) = K$

6. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$ Rpta: $(x + y + 1)^3 = K(y - x + 3)$

7. $(-4x + 3y - 7)dx - (x + 1)dy = 0$ Rpta: $y - 2x - 3 = C(x + 1)^3$

8. $(2x + 3y)dx + (y + 2)dy = 0$ Rpta: $2x - y = 2 Ln|y - x - 1| + C$

9. $(6x + 4y - 8)dx + (x + y - 1)dy = 0$ Rpta: $(y + 3x - 5)^2 = C(y + 2x - 3)$

10. $(3x + 5y + 6)dx = (7y + x + 2)dy$ Rpta: $(y - x - 2)^2 = C(5y + x + 2)$

11. $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$ Rpta: $(x + y - 1)^5(x - y - 1) = C$

12. $(2x - 4y)dx + (x + y - 3)dy = 0$ Rpta: $(y - 2x + 3)^3 = C(y - x + 1)^2$

13. $(x - y + 3)dx + (3x + y + 1)dy = 0$ Rpta: $y = 1 - x + ce^{\frac{2x+2}{x+y-1}}$

14. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x}{2x-y}$ Rpta: $|y - x| = c|y + x|^3$

15. $\frac{dy}{dx}=-\frac{4x+3y+15}{2x+y+7}$ Rpta: $|y + x + 4|\,|y + 4x + 13|^2 = K$

16. $(x - 4y - 9)dx + (4x + y - 2)dy = 0$

    Rpta: $Ln((x - 1)^2 + (y + 2)^2) - 8\operatorname{arctg}(\frac{x-1}{y+2}) = C$

17. $(x - 4y - 3)dx - (x - 6y - 5)dy = 0$ Rpta: $(x - 2y - 1)^2 = C(x - 3y - 2)$

18. $(x - 3y + 2)dx + 3(x + 3y - 4)dy = 0$

    Rpta: $Ln[(x - 1)^2 + 9(y - 1)^2] - 2\operatorname{arctg}(\frac{x-1}{3(y-1)}) = C$

19. $(x + 2y - 1)dx - (2x + y - 5)dy = 0$ Rpta: $(x - y - 4)^3 = C(x + y - 2)$

20. $(x + y - 4)dx - (3x - y - 4)dy = 0,\ y(4) = 1$

    Rpta: $2(x + 2y - 6) = 3(x - y) Ln(\frac{x-y}{3})$

21. $(2x - 3y + 4)dx + 3(x - 1)dy = 0,\ y(3) = 2$

    Rpta: $3(y - 2) = -2(x - 1) Ln(\frac{x-1}{2})$

22. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+2}{x+y-1}$ Rpta: $(2y - 3)^2 + 2(2y - 3)(2x + 1) + (2x + 1)^2 = K$

23. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y+1}{x-2y+1}$ Rpta: $\ln\left|\frac{w^4}{2z^2+2xw+w^2}\right| = \operatorname{arctg}\left(\frac{2z-w}{2z+w}\right)$

    $w = y-\frac{1}{7},\ z = x+\frac{5}{7}$

24. $(4x + 3y + 2)dx + (5x + 4y + 1)dy = 0$

    Rpta: $4 Ln(x + y - 1) = \frac{x+5}{x+y-1}+C$

25. $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$ Rpta: $x^2 + xy - y^2 - x + 3y = C$

26. $(x - y + 4)\,dy + (x + y - 2)\,dx = 0$ Rpta: $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$

27. $(4x + 3y - 7)\,dx + (3x - 7y + 4)\,dy = 0$ Rpta: $4x^2 + 6xy - 7y^2 - 14x + 8y = C$

28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + 3y + 1}{3x - 2y - 5}$ Rpta: $\text{Ln}\,|(x-1)^2 + (y+1)^2| - 3\,\text{arc tg}\,(\dfrac{y+1}{x-1}) = C$

29. $(5x + 2y + 1)\,dx + (2x + y + 1)\,dy = 0$ Rpta: $5x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 2y = C$

30. $(x - 2y - 3)\,dx + (2x + y - 1)\,dy = 0$

Rpta: $\text{Ln}\,C\,(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2) + 4\,\text{arc tg}\,(\dfrac{y+1}{x-1}) + C$

31. $(2x - y - 1)\,dx + (3x + 2y - 5)\,dy = 0$

Rpta: $Ln\sqrt{y^2 + xy - 3y - 3x + 3} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,arc\,\text{tg}\,\dfrac{2y + x - 3}{\sqrt{3}(x-1)} = C$

32. $\dfrac{dy}{dx} = (\dfrac{x+y}{4x-4})^2$ Rpta: $x = 1 + ce^{\frac{4x-4}{x-4y-2}}$

33. $(9x + 7y - 5)\,dx + (5x + 4y - 3)\,dy = 0$

Rpta: $\text{Ln}\,|14y^2 + 12xy + 9x^2 - 44y - 6x + 41| - \dfrac{\sqrt{10}}{15}\,arc\,\text{tg}(\dfrac{\sqrt[3]{10}}{14}(\dfrac{y-2}{x+1} + \dfrac{3}{7})) = C$

34. $(4x + 11y - 42)\,dx + (11x - 9y - 37)\,dy = 0$

Rpta: $4x^2 + 22xy - 9y^2 - 84x - 74y = C$

35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x + y - 12}{6x - y - 12}$ Rpta: $(y - 2x + 4)^4 = C\,(y - 3x + 6)^3$

36. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y - 1}{x - y - 1}$ Rpta: $(x-1)^2 + y^2 = Ke^{2arc\,\text{tg}(\frac{y}{x-1})}$

37. $(4x + 3y + 2)\,dx + (5x + 4y + 1)\,dy = 0$ Rpta: $4\,\text{Ln}\,|x + y - 1| = \dfrac{5}{x + y - 1} + C$

38. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{x + y - 1}{x + 2})^2$ Rpta: $2\,\text{arc tg}\,(\dfrac{y-3}{x+2}) = Ln(x+2) + K$

39. $(2x - 3y + 4)\,dx + 3\,(x - 1)\,dy = 0$, cuando $x = 3$, $y = 2$

Rpta: $3\,(y - 2) = -2\,(x - 1)\,\text{Ln}\,(\dfrac{x-1}{2})$

II. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y^3\,dx + 2\,(x^2 - xy^2)\,dy = 0$ Rpta: $y^2 = x\,\text{Ln}\,cy^2$

2. $(x + y^3)\,dx + (3y^5 - 3y^2x)\,dy = 0$ Rpta: $\text{arc.tg}\,(y^3/x) = \dfrac{1}{2}\,\text{Ln}\,|x^2 + y^6| + c$

3. $(y + y\sqrt{x^2y^4 + 1})dx + 2x\;dy = 0$ Rpta: $\sqrt{x^2y^4 + 1} = cy^2 + 1$

4. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy}$; $y(1) = 2$ Rpta: $x^3y^2 + xy^3 = -4$

5. $(1 - xy^2)dx - 2x^2y\,dy = 0$ Rpta: $xy^2 = \text{Ln}\,x + c$

6. $x^2(1 - xy)\dfrac{dy}{dx} + (1 + xy - x^2y^2) = 0$ Rpta: $x^2y^2 - 2xy - 2\,\text{Ln}\,x = c$

7. $(2y^2 - 3x)\,dx + 2xy\,dy = 0$ Rpta: $x^2y^2 - x^3 = c$

8. $(y^2 - 3x^2y)\,dx + x^3\,dy = 0$ Rpta: $y\,(x - c) = x^3$

9. $2\,(xy^2 + 1)\,dy + y^3\,dx = 0$ Rpta: $xy^2 + 2\,\text{Ln}\,y = c$

10. $(1 - x^2y)\dfrac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$ Rpta: $1 - 2x^2y = cy^2$

11. $y\,(3 - xy)\,dx + x\,(2 - xy)\,dy = 0$ Rpta: $x^3y^2 = c\,e^{xy}$

12. $(x + 2x^2y)\,dy + (2y + 3xy^2)\,dx = 0$ Rpta: $x^2y\,(1 + xy) = c$

13. $(x^2y + x)\dfrac{dy}{dx} + (xy^2 - y) = 0$ Rpta: $y = c\,x\,e^{-xy}$

14. $(x^2 - 2y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$ Rpta: $y^3 = x^2\,(c - \text{Ln}\,x)$

15. $(x + y^3)\,dx + 6xy^2\,dy = 0$ Rpta: $y^3 = -\dfrac{x}{3} + Kx^{-1/2}$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$ Rpta: $x + \sqrt{x^2 - y^2} = c$

17. $(2 + 3xy^2)\,dx - 4x^2 y\,dy = 0$ sug. $y = v x^n$ Rpta: $2 + 5xy^2 = c\,x^{5/2}$

18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} + \dfrac{x^3}{y} + x\,\mathrm{tg}\,(y/x^2)$ sug. $y = v x^2$ Rpta: $x^2 \cos y/x^2 + y \,\mathrm{sen}\, y/x = cx^3$

19. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^5 + 3x^2 y^2}{2x^3 y - 2y^3}$ $(sug.\, x = u^p, y = v^q)$ Rpta: $\dfrac{1}{2} Ln\left|x^6 + y^4\right| + arc.\mathrm{tg}\,(\dfrac{x^3}{y^2}) = c$

20. $(x + y)^2 (x\,dy - y\,dx) + [y^2 - 2x^2 (x + y)^2]\,(dx + dy) = 0$, sug. $z=x+y$, $u = y/x$

Rpta: $(y - x^2 - xy)(x + y)^3 = c\,(y + 2x^2 + 2xy)$

21. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2 y + y^2}{2x^3 + 3xy}$; $y(1) = -2$ Rpta: $x^3y^2 + xy^3 = -4$

22. $(y^2 - Ln\, x)\,dx + xy^3\,dy = 0$, sug. $x = e^u$, $y = \sqrt{z}$

Rpta: $(3-\sqrt{3})Ln\left|y^2 + (1-\sqrt{3})\,Lnx\right| + (3+\sqrt{3})\,Ln\left|y^2 + (1+\sqrt{3})Ln\ x\right| = c$

23. $x^2 y\,dx - (x^3 + y^5)\,dy = 0$, sug. $x = uy$ Rpta: $3y^5 - 2x^3 = cy^3$

24. $x(x + \sqrt{y})dx + 2\sqrt{y}\ dy = 0$, $sug.\, y = u^2$ Rpta: $Ln\ x + 4\displaystyle\int_0^{\sqrt{y/x}} \frac{t^2\,dt}{4t^3 + t + 1} = c$

25. $(3\,\mathrm{tg}\,x - 2\cos y)\sec^2 x\,dx + \mathrm{tg}\,x \,.\, \mathrm{sen}\, y\,dy = 0$

Rpta: $\cos y \,.\, \mathrm{tg}^2 x = \mathrm{tg}^3 x + c$

26. Pruebese que con la ayuda de la sustitución $y = ux$, podemos resolver cualquier ecuación de la forma $y^n f(x)\,dx + H(x,y)(y\,dx - x\,dy) = 0$ donde $H(x,y)$ es función homogénea en x e y.

27. $(x^2 y^3 + x^4 y^4 + x^4 y + x^2 y^4 + y^4 + y^5)\,dx - (x^3 y^2 + x^5 + xy^4)\,dy = 0$

Rpta: $x^4 y^3 + 3x^2 y^3 - 3y^3 - 3y^4 + 3x^2 y^2 + x^4 = K\,xy^3$

28. $(x^3 y^4 + x^5 y^3 + x^5 y^2 + x^3 y^5 + y^5 + y^7)\,dx - (x^4 y^3 + x^6 y + xy^6)\,dy = 0$

Rpta: $\dfrac{x^3}{3} + x - \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{y^2}{2x^2} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{x^3}{3y^3} = c$

29. Demostrar que la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Ax + By^n}{y^{n-1}(A'x + B'y^m)}$ se puede transformar en una ecuación diferencial homogénea, haciendo el cambio de variable $u = y^m$.

30. Demostrar que la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^{m-1}(Ay + Bx^m)}{A'y + B'x^m}$, se puede transformar en una ecuación diferencial homogénea, haciendo el cambio de variable $u = x^m$.

31. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - x}{2xy}$, $sug.\, z = y^2$, Rpta: $x = Ke^{-y^2/x}$

32. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 y + x^5}{y - x^3}$, $sug.\, z = x^3$ Rpta: $3y^2 - 6yx^3 - x^6 = c$

33. $(2xy - 4x^3)\,dx - (2y - x^2)\,dy = 0$ Rpta: $y^2 - x^2 y + x^4 = c$

34. $3\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + x/y^2}{3y^3 - x}$ Rpta: $x^2 + 2xy^3 - 3y^6 = c$

35. $(4xy^{1/2} - 6y)\,dx + (4y^{1/2} - 3x)\,dy = 0$, sug. $z = y^{1/2}$

Rpta: $x^2 - 3xy^{1/2} + 2y = c$

36. $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3 - xy^5}{xy^2 + 1}$ Rpta: $x^2 - \dfrac{2x}{y^2} - \dfrac{1}{y^4} = c$

37. $2\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y + 4\sqrt{x}}{x - 2y\sqrt{x}}$ Rpta: $2x + y\sqrt{x} - y^2 = c$

38. $(2x - y^4)\,dx - 4y^3 (x + 12y^4)\,dy = 0$ Rpta: $x^2 - xy^4 - 6y^8 = c$

39. $(xy^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$ Rpta: $x^2 y + 2x = cy$

40. $(x - y^2)dx + 2xy\,dy = 0$, Rpta: $xe^{y^2/x} = K$

41. $(3x^5 + 3x^2y^2)dx + (2y^3 - 2x^3 y)dy = 0$

2.6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Exactas.

a) **Diferencial Total:**

Si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es una función diferenciable en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces la diferencial total de f es la función df, cuyo valor está dado por:

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

b) **Diferencial Exacta:**

Una expresión de la forma $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, se denomina exacta si existe una función

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$df(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

Es decir, que toda expresión que es la diferencial total de alguna función de x e y se llama diferencial exacta.

c) **Definición:**

Consideremos la ecuación diferencial.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad ....(\alpha)$$

Si existe una función $z = f(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \;\wedge\; \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

diremos que la ecuación (α) es una ecuación diferencial exacta.

d) **Teorema:**

La condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial

$M(x,y)\,dx + N(x,y)dy = 0$, sea axacta, es que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Ejemplo: La ecuación diferencial ordinaria.

$(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)\,dx + (e^x \cos y + 2\cos x)\,dy = 0$ es exacta porque:

$$M(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y - 2\operatorname{sen} x$$

$$N(x,y) = e^x \cos y + 2\cos x \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^x \cos y - 2\operatorname{sen} x$$

de donde $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

e) **Solución de una Ecuación Diferencial Exacta:**

Consideremos la ecuación diferencial exacta.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad ....(1)$$

Entonces existe una función $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)\,y\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \quad ......(2)$$

reemplazando (2) en la ecuación (1) se tiene:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = dy = 0 \quad ....(3)$$

por otra parte, si $z = f(x,y)$ entonces su diferencial total es:

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \quad ....(4)$$

Luego al comprobar (3) y (4) se tiene:

$dz = 0 \Rightarrow z = c$, es decir

$$f(x,y) = c$$

Que es la solución de la ecuación diferencial.

Como $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ integramos con respecto a x.

$$f(x,y) = \int M(x,y) + g'(y) \quad ....(\alpha)$$

donde g (y) es la constante de integración, que es una función que depende sólo de la variable y, puesto que la integración es con respecto a x, derivando la ecuación (α) con respecto a y.

es decir: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y)$

Como $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ entonces se tiene:

$N(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y)$ de donde

$g'(y)N(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$, integrando

$$g'(y) = \int [N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]\ dy + K_1 ....(\beta)$$

Reemplazando (β) en (α) se tiene la solución general de la ecuación diferencial (1); en forma análoga se hace para el otro caso cuando se toma $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ y se integre con respecto a la variable y.

f) **Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $(2xy^2 + 2y)\,dx + (2x^2 y + 2x)\,dy = 0$

Solución

$$\begin{cases} M(x,y) = 2xy^2 + 2y \\ N(x,y) = 2x^2 y + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4xy + 2 \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 4xy + 2 \end{cases}$$

de donde $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ por lo tanto la ecuación diferencial es exacta;

entonces $\exists f(x,y)$, tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$, de donde

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy^2 + 2y$, integrando respecto a x.

$$f(x,y) = \int (2xy^2 + 2y)dx + g(y)$$

$f(x,y) = x^2y^2 + 2xy + g(y)$ derivando respecto a y.

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x^2y + 2x + g'(y)$, pero como $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

se tiene $N(x,y) = 2x^2 y + 2x + g'(y)$

$x^2 y + 2x + g'(y) = x^2 y + 2x \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c$

$f(x,y) = x^2 y^2 + 2xy + c$

$$\therefore \quad x^2y^2 + 2xy = K$$

2. $(e^x \text{ seny} - 2y \text{ senx})dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)dy = 0$

Solución

$$\begin{cases} M(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x \\ N(x,y) = e^x \cos y + 2\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y - 2\operatorname{sen} x \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^x \cos y - 2\operatorname{sen} x \end{cases}$$

de donde $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, por lo tanto la ecuación diferencial es exacta, entonces existe una función f(x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$. Luego tenemos

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^x \operatorname{sen} y-2y\operatorname{sen} x$, integrando respecto a x.

$$f(x,y)=\int (e^x \operatorname{sen} y-2y\operatorname{sen} x)dx+g(y)$$

$f(x,y)=e^x \operatorname{sen} y+2y\cos x+g(y)$, derivando respecto a y.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=e^x\cos y+2\cos x+g'(y),\ Como\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

entonces $N(x,y)=e^x\cos y+\cos x+g'(y)$

$$e^x\cos y+2\cos x+g'(y)=e^x\cos y+2\cos x$$

$$g'(y)=0\Rightarrow g(y)=c$$

Luego f (x,y) = e^x seny + 2y cosx + c

$\therefore$ e^x seny + 2y cosx = K

3. $(2xy^3+y\cos x)dx+(3x^2y^2+\operatorname{sen}x)dy=0$

Solución

$$\begin{cases} M(x,y)=2xy^3+y\cos x \\ N(x,y)=3x^2y^2+\operatorname{sen}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=6xy^2+\cos x \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=6xy^2+\cos x\end{cases}$$

de donde $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, por lo tanto la ecuación diferencial es exacta,

entonces, existe una función f (x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$. Luego tenemos:

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2xy^3+y\cos x$, integrando respecto a x.

$$f(x,y)=\int (2xy^3+y\cos x)dx+g(y)$$

$f(x,y)=x^2y^3+y\operatorname{sen}x+g(y)$, derivando respecto a y.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3x^2y^2+\operatorname{sen}x+g'(y),\ Como\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

entonces N (x,y) = $3x^2y^2$ + sen x + g'(y) ; de donde

$3x^2y^2$ + sen x + g'(y) = $3x^2y^2$ + sen x $\Rightarrow$ g'(y) = 0 $\Rightarrow$ g (y) = c

Luego f (x,y) = x^2y^3 + y sen x + c

$\therefore$ x^2y^3 + y sen x = K

4. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0$

Solución

$$\begin{cases} M(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \\ N(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}-\dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}-\dfrac{1}{y^2}\end{cases}$$

de donde $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, por lo tanto la ecuación diferencial es exacta,

entonces existe una función f (x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$. Luego tenemos:

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, integrando respecto a x.

$$f(x,y)=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+g(y)$$

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+Lnx+\dfrac{x}{y}+g(y)$, derivando respecto a y.

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{y^2}+g'(y)$ Como $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$

entonces $N(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{y^2}+g'(y)$; de donde

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{y^2}+g'(y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow g(y)=Lny+c$$

Luego $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+Lnx+\dfrac{x}{y}+Lny+c$

$$\therefore\ \sqrt{x^2+y^2}+Lnxy+\frac{x}{y}=K$$

5. $(\operatorname{sen} y+y\operatorname{sen} x+\frac{1}{x})dx+(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y})dy=0$

Solución

$$\begin{cases} M(x,y)=\operatorname{sen} y+y\operatorname{sen} x+\dfrac{1}{x} \\ N(x,y)=x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\cos y+\operatorname{sen} x \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\cos y+\operatorname{sen} x\end{cases}$$

de donde $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, por lo tanto la ecuación diferencial es exacta,

entonces existe una función f (x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$.

Luego tenemos $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\operatorname{sen} y+y\operatorname{sen} x+\dfrac{1}{x}$, integrando respecto a x.

$$f(x,y)=\int(\operatorname{sen} y+y\operatorname{sen} x+\frac{1}{x})dx+g(y)$$

$f(x,y)=x\operatorname{sen} y-y\cos x+Lnx+g(y)$, derivando respecto a y.

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x\cos y-\cos x+g'(y)$. Como $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$, entonces

N (x,y) = x cos y - cos x + g' (y) , de donde

$$x\cos y-\cos x+g'(y)=x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\Rightarrow g'(y)=\frac{1}{y}\Rightarrow g(y)=Lny+c$$

Luego f (x,y) = x sen y - y cos x + Ln x + Ln y + c

∴ x sen y - y cos x + Ln xy = K

6. $(\dfrac{y}{1+x^2}+arc.\operatorname{tg} y)dx+(\dfrac{x}{1+y^2}+arc.\operatorname{tg} x)dy=0$

Solución

$$\begin{cases} M(x,y)=\dfrac{y}{1+x^2}+arc.\operatorname{tg} y \\ N(x,y)=\dfrac{x}{1+y^2}+arc\ \operatorname{tg} x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2} \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\dfrac{1}{1+y^2}+\dfrac{1}{1+x^2}\end{cases}$$

de donde $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, por lo tanto la ecuación diferencial es exacta,

entonces existe una función f (x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$.

Luego tenemos: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{y}{1+x^2}+arc.\operatorname{tg} y$, integrando respecto a x.

$f(x,y)=\displaystyle\int(\frac{y}{1+x^2}+arc.\operatorname{tg} y)dx+g(y)$, efectuando.

f (x,y) = y arc.tg x + x arc. tg y + g (y), derivando respecto a y.

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=arc.\operatorname{tg} x+\dfrac{x}{1+y^2}+g'(y)$. Como $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

entonces N (x,y) = arc.tg x + $\dfrac{x}{1+y^2}$ + g' (y), de donde

$$arc\ \operatorname{tg} x + \frac{x}{1+y^2} + g'(y) = \frac{x}{1+y^2} + arc.\operatorname{tg} x \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

Luego f (x,y) = y arc.tg x + x arc.tg y + c

$\therefore$ y arc.tg x + x arc.tg y = K

g) Ejercicios Propuestos:

I. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales en caso de ser exactas:

1. $(2xy - \operatorname{tg} y)\,dx + (x^2 - x\sec^2 y)\,dy = 0$ Rpta: $x^2 y - x \operatorname{tg} y = K$

2. $(\operatorname{sen} x.\ \operatorname{sen} y - x e^y)\,dy = (e^y + \cos x \cos y)\,dx$ Rpta: $x e^y + \cos y \operatorname{sen} x = K$

3. $(y + y\cos xy)\,dx + (x + x\cos xy)\,dy = 0$ Rpta: $xy + \operatorname{sen} xy = K$

4. $(\frac{y}{x} + 6x)dx + (Lnx - 2)dy = 0$ Rpta: $y \operatorname{Ln} x + 3x^2 - 2y = K$

5. $(\cos 2y - 3x^2 y^2)\,dx + (\cos 2y - 2x \operatorname{sen} 2y - 2x^3 y)\,dy = 0$

   Rpta: $\frac{\operatorname{sen} 2y}{2} + x\cos 2y - x^3 y^2 = c$

6. $e^x (x^2 e^x + e^x + xy + y)\,dx + (x e^x + y)\,dy = 0$

   Rpta: $xye^x + \frac{y^2}{2} + \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 3)x = c$

7. $(1 + y^2 + xy^2)\,dx + (x^2 y + y + 2xy)\,dy = 0$ Rpta: $2x + y^2 (1 + x)^2 = c$

8. $(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3})dx + (x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2})dy = 0$

   Rpta: $x^3 \operatorname{tg} y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = c$

9. $(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y})dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2})dy$ Rpta: $x^3 y + x^2 - y^2 = cxy$

10. $(\frac{\operatorname{sen} 2x}{y} + x)dx + (y - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{y^2})dy = 0$ Rpta: $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{2} = c$

11. $(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x})dx + (\sqrt{1+x^2} + x^2 - Lnx)dy = 0$

    Rpta: $y\sqrt{1+x^2} + x^2 y - yLnx = c$

12. $(y - x^3)\,dx + (x + y^3)\,dy = 0$ Rpta: $4xy - x^4 + y^4 = c$

13. $(y + y\cos xy)\,dx + (x + x\cos xy)\,dy = 0$ Rpta: $xy + \operatorname{sen} xy = c$

14. $(x-1)^{-1} ydx + [Ln(2x-2) + \frac{1}{y}]dy = 0$ Rpta: $y \operatorname{Ln} |2x - 2| + \operatorname{Ln} y = c$

15. $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2 y + 4y^3)\,dy = 0$ Rpta: $x^3 + 3x^2 y^2 + y^4 = c$

16. $(9x^2 + y - 1) - (4y - 1)\frac{dy}{dx} = 0$ Rpta: $3x^3 + xy - x - 2y^2 = c$

17. $(y \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)\,dx - (x\cos y + \cos x)\,dy = 0$ Rpta: $x \operatorname{sen} y + y\cos x = c$

18. $(3x^2 + 3xy^2)\,dx + (3x^2 y - 3y^2 + 2y)\,dy = 0$ Rpta: $x^3 + \frac{3}{2}x^2 y^2 - y^3 + y^2 = c$

19. $\frac{2x}{y}dy + (2Ln5y + \frac{1}{x})dx = 0$ Rpta: $\operatorname{Ln} x + 2x \operatorname{Ln} y = c$

20. $e^{x^2}(dy + 2xydx) = 3x^2 dx$ Rpta: $ye^{x^2} = x^3 + c$

21. $e^{2x}(dy + 2ydx) = x^2 dx$ Rpta: $3ye^{2x} = x^3 + c$

22. $y^3 \operatorname{sen} 2x\,dx - 3y^2 \cos^2 x\,dy = 0$ Rpta: $y^3 (1 + \cos 2x) = c$

23. $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x)\,dx + (x e^{xy} \cos 2x - 3)\,dy = 0$

    Rpta: $e^{xy} \cos 2x + x^2 - 3y = c$

24. $(ax^2 + 2bxy + cy^2)\,dx + (bx^2 + 2cxy + y^2)\,dy = 0$

    Rpta: $ax^3 + 3bx^2 y + 3cy^2 + y^3 = c$

25. $(x^2 + y e^{2y})\,dx + (2xy + x)e^{2y}\,dy = 0$ Rpta: $x^3 + 3xy e^{2y} = K$

26. $(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)\,dx + (x\cos y + \cos y)\,dy = 0$ Rpta: $(x + 1)\operatorname{sen} y - \cos x = K$

27. $e^x(y^3+xy^3+1)\,dx+3y^2(xe^x-6)\,dy=0$ Rpta: $xe^xy^3+e^x-6y^3=c$

28. $4x^3-e^{xy}(y+xy')=0$ Rpta: $x^4-e^{xy}=c$

29. $dx=\dfrac{ydx}{1-x^2y^2}+\dfrac{x}{1-x^2y^2}dy$ Rpta: $\dfrac{1+xy}{1-xy}=Ke^{2x}$

30. $(3x^2+6xy-y^2)\,dx+(3x^2-2xy+2y^2)\,dy=0$ Rpta: $x^3+3x^2y-xy^2+y^3=c$

31. $\left[Ln(x-y)+\dfrac{x+y}{x-y}\right]dx+\left[Ln(x-y)-\dfrac{x+y}{x-y}\right]dy=0$

Rpta: $(x+y)\,Ln\,(x-y)=c$

32. $(\dfrac{y}{x}+Lny)dx+(\dfrac{x}{y}+Lnx)dy=0$ Rpta: $y\,Ln\,x+x\,Ln\,y=c$

33. $\sec x\,(tg\,x.\,tg\,y+y\sec x)\,dx+(\sec x.\sec^2 y+tg\,x)\,dy=0$

Rpta: $\sec x.\,tg\,y+y\,tg\,x=c$

34. $(1+tg\,xy)\,dx+(\sec(xy).\,tg(xy)+x\sec^2(xy))(xdy+ydx)=0$

Rpta: $x+\sec(xy)+x\,tg(xy)=c$

35. $(5x^4-9x^2y^2+5y^4)\,dx+2xy\,(10y^2-3x^2)\,dy=0$

Rpta: $x^5-3x^3y^2+5xy^4=K$

36. $(1+Lnxy)dx+(1+\dfrac{x}{y})dy=0$ Rpta: $x\,Ln\,(xy)+y=K$

37. $(ye^x+e^y)\,dx+(e^x+xe^y)\,dy=0$ Rpta: $ye^x+xe^y=K$

38. $y(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(x-y)^2})dx+x(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{(x-y)^2})dy=0$ Rpta: $\dfrac{xy}{2}+\dfrac{y}{x-y}=K$

39. $y\,(e^{xy}+y)\,dx+x\,(e^{xy}+2y)\,dy=0$ Rpta: $e^{xy}+xy^2=K$

40. $\dfrac{y}{x}dy-(\dfrac{y^2}{2x^2}+x)dx=0$ Rpta: $y^2-x^3=cx$

41. $(xy^2-y)\,dx+x\,(xy-1)\,dy=0$ Rpta: $Ln(Kxy)=-\dfrac{1}{xy}$

42. $(\cos x.\cos y-ctg\,x)\,dx-sen\,x.sen\,y\,dy=0$ Rpta: $sen\,x\cos y=Ln\,(K\,sen\,x)$

43. $2ydx+3xdy=\dfrac{dx}{xy^3}-\dfrac{dy}{y^4}$ Rpta: $x^2y^3=\dfrac{x}{y}+c$

44. $(2x+y\cos xy)\,dx+x\cos xy\,dy=0$ Rpta: $x^2+sen\,(xy)=c$

45. $(2xy+1+Ln\,x)\,dx+x^2\,dy=0$ Rpta: $x\,(xy+Ln\,x)=K$

46. $(2ye^{2x}+2x\cos y)\,dx+(e^{2x}-x^2\,sen\,y)\,dy=0$ Rpta: $ye^{2x}+x^2\cos y=c$

47. $(2xy+x^3)\,dx+(x^2+y^2)\,dy=0$ Rpta: $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{y^3}{3}+x^2y=c$

48. $(2xe^y+y^2e^x+2x)\,dx+(x^2e^y+2ye^x)\,dy=0$ Rpta: $x^2e^y+y^2e^x+x^2=c$

49. $(e^x\,sen\,y-2y\,sen\,x)\,dx+(e^x\cos y+2\cos x)\,dy=0$ Rpta: $e^x\,sen\,y+2y\cos x=c$

50. $(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\,sen\,2x+2x)\,dx+(xe^{xy}\cos 2x-3)\,dy=0$

Rpta: $e^{xy}\cos 2x+x^2-3y=c$

51. $(2xy^2+2y)\,dx+(2x^2y+2x)\,dy=0$ Rpta: $x^2y^2+2xy=c$

52. $(x^2+y^2+2x)\,dx+2xy\,dy=0$ Rpta: $\dfrac{x^3}{3}+xy^2+x^2=c$

53. $(x^3-3xy^2+2)\,dx-(3x^2y-y^2)\,dy=0$ Rpta: $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3x^2y^2}{2}+2x+\dfrac{y^3}{3}=c$

54. $\dfrac{2xdx}{y^3}+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$ Rpta: $x^2-y^2=cy^3$

55. $yx^{y-1}\,dx+x^y\,Ln\,x\,dy=0$ Rpta: $x^y=c$

56. $(sen\,y+y\,sen\,x+\dfrac{1}{x})dx+(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y})dy=0$

Rpta: $x\,sen\,y-y\cos x+Ln\,xy=c$

57. $\frac{y+\operatorname{sen} x.\cos^2 xy}{\cos^2 xy}dx + (\frac{x}{\cos^2 xy} + \operatorname{sen} y)dy = 0$ Rpta: tg xy - cos x - cos y = c

58. $(\frac{1}{y}\operatorname{sen}\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos(\frac{y}{x}) + 1)dx + (\frac{1}{x}\cos(\frac{y}{x}) - \frac{x}{y^2}\operatorname{sen}(\frac{x}{y}) + \frac{1}{y^2})dy = 0$

Rpta: $\operatorname{sen}(\frac{y}{x}) - \cos(\frac{x}{y}) + x - \frac{1}{y} = c$

59. $(1+e^{x/y})dx + e^{x/y}(1-\frac{x}{y})dy = 0$ Rpta: $x + y\,e^{x/y} = c$

60. $x(2x^2+y^2)dx + y(x^2+2y^2)dy = 0$ Rpta: $x^4 + x^2y^2 + y^4 = c$

61. [n cos (nx + my) - m sen (mx + ny)]dx + [m cos (nx + my) - n sen (mx + ny)] dy = 0

Rpta: sen (nx + my) + cos (mx + ny) = c

62. $(x+3)^{-1}\cos y\,dx - (\operatorname{sen} y.\,Ln(5x+15) - \frac{1}{y})dy = 0$

Rpta: cos y . Ln (5x + 15) + Ln y = c

63. $\frac{y^2-2x^2}{xy^2-x^3}dx + \frac{2y^2-x^2}{y^3-x^2y}dy = 0$ Rpta: $x^2y^2(x^2-y^2) = c$

64. $\frac{3y}{x^2+3x}dx + (2yLn(\frac{5x}{x+3}) + 3\operatorname{sen} y)dy = 0$ Rpta: $y^2 Ln(\frac{5x}{x+3}) - 3\cos y = c$

65. $(\cos 2y - 3x^2y^2)dx + (\cos 2y - 2x\operatorname{sen} 2y - 2x^3y)dy = 0$

Rpta: $2x\cos 2y - 2x^3y^2 + \operatorname{sen} 2y = c$

66. $(\frac{y}{x} - Lny)dx + (Lnx - \frac{x}{y})dy = 0$ Rpta: y Ln x - x Ln y = c

67. $(x^3 + e^x\operatorname{sen} y + y^3)dx + (3xy^2 + e^x\cos y + y^3)dy = 0$

Rpta: $x^4 + y^4 + 4xy^3 + 4e^x \operatorname{sen} y = K$

68. $\left[Ln(Ln(x-y)) + \frac{1}{Ln(x-y)}.\frac{x}{x-y}\right]dx - \left[\frac{1}{Ln(x-y)}.\frac{x}{x-y}\right]dy = 0$

Rpta: x Ln (Ln (x - y)) = K

69. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y\cos x}{\operatorname{sen} x + y}$ Rpta: $x^2 - y^2 - 2y\operatorname{sen} x = c$

70. $(x^2 + \frac{y}{x})dx + (Lnx + 2y)dy = 0$ Rpta: $x^3 + 3y\,Ln\,x + 3y^2 = c$

II. Resolver las ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas.

1. $3y(x^2-1)dx + (x^3+8y-3x)dy = 0$, $y(0) = 1$ Rpta: $xy(x^2-3) = 4(1-y^2)$

2. $(1-xy)^{-2}dx + [y^2 + x^2(1-xy)^{-2}]dy = 0$, cuando x = 2, y = 1

Rpta: $xy^4 - y^3 + 5xy - 3x = 5$

3. $(xy^2 + x - 2y + 3)dx + x^2y\,dy = 2(x+y)dy$, cuando x = 1, y = 1

Rpta: $(xy-2)^2 + (x-3)^2 = 2y^2 + 15$

4. $(x + e^{x/y})dx + e^{x/y}(1-\frac{x}{y})dy = 0$, $y(0) = 2$ Rpta: $\frac{x^2}{2} + ye^{x/y} = 2$

5. $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$, $y|_{x=1} = 1$ Rpta: y = x

6. $(4x - 2y + 3)dx + (5y - 2x + 7)dy$, $y(1) = 2$ Rpta: $4x^2 - 4xy + 5y^2 + 6x = 50$

7. $(2x\operatorname{sen} y + 2x + 3y\cos x)dx + (x^2\cos y + 3\operatorname{sen} x)dy = 0$ Cuando $x = \frac{\pi}{2}$, y = 0

Rpta: $x^2\operatorname{sen} y + x^2 + 3y\operatorname{sen} x = \frac{\pi^2}{4}$

8. $(ye^{2x} - 3xe^{2y})dx + (\frac{e^{2x}}{2} - 3x^2e^{2y} - e^y)dy = 0$, $y(1) = 0$

Rpta: $y\,e^{2x} - 3x^2e^{2y} - 2e^y + 5 = 0$

9. $(2xy - 3)dx + (x^2 + 4y)dy = 0$, $y(1) = 2$, Rpta: $x^2y - 3x + 2y^2 = 7$

10. $(2y\operatorname{sen} x\cos x + y^2\operatorname{sen} x)dx + (\operatorname{sen}^2 x - 2y\cos x)dy = 0$, $y(0) = 3$

Rpta: $y^2\cos x - y\operatorname{sen}^2 x = 9$

11. $\dfrac{3-y}{x^2}dx+\dfrac{y^2-2x}{xy^2}dy=0,\ \ y(-1)=2$ Rpta: $-3y+2x+y^2=2xy$

12. $(3x^2y^2-y^3+2x)dx+(2x^3y-3xy^2+1)dy=0,\ \ y(-2)=1$

III.

1) **Demostrar que la ecuación diferencial homogénea**

$(Ax+By)dx+(Cx+Dy)dy=0$ es exacta si y solo si $B=C$.

2) **Demostrar que la ecuación homogénea**

$(Ax^2+Bxy+Cy^2)dx+(Dx^2+Exy+Fy^2)dy=0$

es exacta si y solo si $B=2D$ y $E=2C$.

3) **Determinar los valores de a y b para que la ecuación diferencial sea exacta y resolverla**

a) $(y+x^3)dx+(ax+by^3)dy=0$ Rpta: $a=1,\ b\in R$

b) $axy\,dx+(x^2+\cos y)dy=0$ Rpta: $a=2,\ x\neq 0$

c) $xy^3\,dx+ax^2y^2\,dy=0$ Rpta: $a=3/2$

d) $(ax+b)\,ydx+(x^2+x+\dfrac{1}{y})dy=0$ Rpta: $a=2,\ b=3$

e) $ax\,(y-\cos y)dx+x^2\,(1+\text{seny})dy=0$ Rpta: $a=2$

f) $(xy^2+bx^2\,y)dx+(x+y)x^2\,dy=0$ Rpta: $b=3$

g) $(y\,e^{2xy}+x)dx+bx\,e^{2xy}\,dy=0$ Rpta: $b=1$

4) $(2xy-3x^2)dx+(x^2+y)dy=0$ Rpta: $x^2y-x^3+\dfrac{y^2}{2}=C$

5) $y\,(2xy^2-3)dx+(3x^2y^2-3x+4y)dy=0$ Rpta: $y\,(x^2y^2-3x+2y)=C$

6) $(x+\text{seny}-\cos y)dx+x\,(\text{seny}+\cos y)dy=0$

Rpta: $x^2+2x\,(\text{seny}-\cos y)=C$

7) $x(3xy-4y^3+6)dx+(x^3-6x^2y^2-1)dy=0$

Rpta: $x^3y-2x^2y^3+3x^2-y=C$

8) $(\text{seny}+2x\cos^2y)dx+x\cos y\,(2x\,\text{seny}+1)dy=0$

Rpta: $x\,\text{seny}-x^2\cos^2y=C$

9) $(xy^2+y-x)dx+x\,(xy+1)dy=0$ Rpta: $x^2y^2+2xy-x^2=C$

10) $2x(3x+y-ye^{-x^2})dx+(x^2+3y^2+e^{-x^2})dy=0$ Rpta: $x^2y+y^3+2x^3+ye^{-x^2}=C$

2.7. Factor de Integración

Consideremos la ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Si la ecuación (1) no es exacta, se puede transformar en exacta, eligiendo una función u que pueda depender tanto de x como de y de tal manera que la ecuación

$$u(x,y)\,M(x,y)dx+u(x,y)\,N(x,y)dy=0\ldots\ldots\ldots(2)$$

sea exacta, entonces a la función u(x,y) se llama factor integrante o factor de integración. Como la ecuación (2) es exacta, entonces se cumple

$$\frac{\partial u(x,y)M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,y)N(x,y)}{\partial x}\text{, de donde}$$

$$M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+u(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial x}=N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+u(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

de donde agrupando se tiene:

$$M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}-N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\Big(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\Big)u(x,y)\ldots(3)$$

Para determinar el factor integrante consideremos los siguientes casos:

1er. Caso: Si u es una función sólo de x.

entonces $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$. Luego de la ecuación (3) resulta:

$$-N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = (\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y})u(x)$$

$$N(x,y)\frac{du(x,y)}{dx} = (\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x})u(x)$$

$$\frac{du(x)}{u(x)} = \frac{1}{N(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x})$$ integrando

$$\int \frac{du(x)}{u(x)} = \int \frac{1}{N(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x})dx = \int f(x)dx$$

donde $f(x) = \frac{1}{N(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x})$

Como $\int \frac{du(x)}{u(x)} = \int f(x)dx \Rightarrow Lnu(x) = \int f(x)dx$

$$\therefore\ u(x) = e^{\int f(x)dx}$$

2do. Caso: Si u es una función solo de y, entonces $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0$.

Luego de la ecuación (3) resulta:

$$M(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial y} = (\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y})u(y)$$, de donde

$$\frac{du(y)}{u(y)} = -\frac{1}{M(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x})dy = g(y)dy$$

donde $g(y) = -\frac{1}{M(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x})$

$\frac{du(y)}{u(y)} = g(y)dy$ integrando se tiene: $\int \frac{du(y)}{u(y)} = \int g(y)dy \Rightarrow Lnu(y) = \int g(y)dy$

$$\therefore\ u(y) = e^{\int g(y)dy}$$

3er. Caso: En muchos ejercicios el factor integrante está dado en un producto de dos funciones f(x) y g(y), es decir, u(x,y) = f(x)g(y) que reemplazando en la ecuación (3) se tiene:

$$M(x,y)\frac{\partial(f(x).g(y))}{\partial y} - N(x,y)\frac{\partial(f(x).g(y))}{\partial x} = (\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y})f(x)g(y)$$

$$M(x,y)\ f(x)\ .\ g'(y) - N(x,y)\ f'(x)\ g(y) = (\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y})f(x)g(y)$$

esta expresión es lo mismo escribir en la forma:

$$(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x})f(x)g(y) = N(x,y)f'(x)g(y) - M(x,y)f(x)g'(y)$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = N(x,y)\frac{f'(x)}{f(x)} - M(x,y)\frac{g'(y)}{g(y)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

donde M y N son funciones conocidas, de la ecuación (4) por inspección se puede determinar las funciones f(x) y g(y).

4to. Caso: Para ciertos ejercicios su factor integrante es de la forma $u(x,y) = x^n y^m$, donde n y m se determinan mediante la condición necesaria y suficiente de las ecuaciones diferenciales exacta.

a. **Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$

<u>Solución</u>

$$\begin{cases} M = 1 - x^2y \\ \\ N = x^2(y-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = -x^2 \\ \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -3x^2 + 2xy \end{cases}$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial no es exacta.

Sea $f(x)=\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=\frac{-x^2-(-3x^2+2xy)}{x^2(y-x)}=-\frac{2}{x}$

el factor integrante es $u(x)=e^{\int f(x)dx}=e^{\int -\frac{2}{x}dx}$

$u(x)=e^{-2Lnx}=\frac{1}{x^2}\Rightarrow u(x)=\frac{1}{x^2}$

al multiplicar a la ecuación diferencial por $u(x)=\frac{1}{x^2}$

es decir: $(\frac{1}{x^2}-y)dx+(y-x)dy=0$, que es exacta.

En efecto: $\begin{cases} M=\frac{1}{x^2}-y \\ N=y-x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=-1 \\ \frac{\partial N}{\partial x}=-1 \end{cases}$

Como $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial es exacta.

$\Rightarrow \exists\ f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$, de donde

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{x^2}-y$, integrando respecto a x.

$f(x,y)=\int(\frac{1}{x^2}-y)dx+g(y)=-\frac{1}{x}-xy+g(y)$

$f(x,y)=-\frac{1}{x}-xy+g(y)$, derivando respecto a y.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-x+g'(y)$, como $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N$ entonces

$N=-x+g'(y)\Rightarrow -x+g'(y)=y-x$

$g'(y)=y\Rightarrow g(y)=\frac{y^2}{2}+C$

Luego $f(x,y)=-\frac{1}{x}-xy+\frac{y^2}{2}+C$

$\therefore\quad xy^2-2x^2y-2=Kx$

2. $\frac{y}{x}dx+(y^3-Lnx)dy=0$

Solución

$\begin{cases} M=\frac{y}{x} \\ N=y^3-Lnx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x} \\ \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{x} \end{cases}$

Como $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial no es exacta.

Sea $g(y)=-\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=-\frac{1}{y/x}(\frac{1}{x}-(-\frac{1}{x}))$

$g(y)=-\frac{x}{y}(\frac{2}{x})=-\frac{2}{y}\Rightarrow g(y)=-\frac{2}{y}$

Luego el factor integrante es, $u(y)=e^{\int g(y)dy}=e^{\int -\frac{2dy}{y}}$

$u(y)=e^{-2Lny}=\frac{1}{y^2}$, que multiplicado a la ecuación diferencial dada se tiene:

$\frac{1}{xy}dx+(y-\frac{Lnx}{y^2})dy=0$, que es exacta,

En efecto: $\begin{cases} M=\frac{1}{xy} \\ N=y-\frac{Lnx}{y^2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{xy^2} \\ \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{xy^2} \end{cases}$

Como $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial es exacta.

$\Rightarrow \exists\ f(x,y)$, tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$, de donde.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{xy}$, integrando respecto a x.

$$f(x,y)=\int\frac{dx}{xy}+g(y)=\frac{Lnx}{y}+g(y) \text{ derivando}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{Lnx}{y^2}+g'(y). \text{ Como } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N, \text{ entonces}$$

$N=-\frac{Lnx}{y^2}+g'(y)$ de donde se tiene:

$$-\frac{Lnx}{y^2}+g'(y)=y-\frac{Lnx}{y^2}\Rightarrow g'(y)=y\Rightarrow g(y)=y^2/2+C$$

Luego $f(x,y)=\frac{Lnx}{y}+y^2/2+C$

$$\therefore\ \frac{Lnx}{y}+\frac{y^2}{2}=K$$

3. $(xy+x^2y+y^3)\,dx+(x^2+2y^2)\,dy=0$

Solución

$$\begin{cases} M=xy+x^2y+y^3 \\ N=x^2+2y^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=x+x^2+3y^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x}=2x \end{cases}$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial no es exacta.

Sea u (x,y) = f (x) . g (y) un factor integrante para esto, empleamos la ecuación (4)

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\frac{f'(x)}{f'(x)}-M\frac{g'(y)}{g'(y)}$$

$$x+x^2+3y^2-2x=(x^2+2y^2)\frac{f'(x)}{f(x)}-(xy+x^2y+y^3)\frac{g'(y)}{g(y)}$$

$$x^2+3y^2-x=(x^2+2y^2)\frac{f'(x)}{f(x)}-(xy+x^2y+y^3)\frac{g'(y)}{g(y)}$$

$$\begin{cases} \frac{f'(x)}{f(x)}=2 \\ \frac{g'(y)}{g(y)}=\frac{1}{y} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} Lnf(x)=2x \\ Lng(y)=Lny \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f(x)=e^{2x} \\ g(y)=y \end{cases}$$

Como u (x,y) = f (x) g (y) = y e^{2x} factor integrante ahora multiplicamos a la ecuación diferencial por el factor integrante u (x,y) = y e^{2x}.

$$y\,e^{2x}(xy+x^2y+y^3)\,dx+y\,e^{2x}(x^2+2y^2)\,dy=0$$

es una ecuación diferencial exacta, es decir:

$$\begin{cases} M=ye^{2x}(xy+x^2y+y^3) \\ N=ye^{2x}(x^2+2y^2) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=e^{2x}(2xy+2x^2y+4y^3) \\ \frac{\partial N}{\partial x}=e^{2x}(2xy+2x^2y+4y^3) \end{cases}$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial es exacta.

$\Rightarrow\exists\ f(x,y)$, tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$, de donde.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=ye^{2x}(xy+x^2y+y^3)$ integrando respecto a x.

$$f(x,y)=\int ye^{2x}(xy+x^2y+y^3)dx+g(y)=\frac{y^2}{2}\int d(e^{2x}(x^2+y^2))+g(y)$$

$f(x,y)=\frac{y^2}{2}e^{2x}(x^2+y^2)+g(y)$ derivando respecto a y.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=ye^{2x}(x^2+2y^2)+g'(y)$. Como $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N$ entonces.

N = y e^{2x} (x^2+2y^2) + g´ (y), de donde

y e^{2x} (x^2+2y^2) + g´(y) = y e^{2x} (x^2+2y^2), simplificando

$g'(y)=0\Rightarrow g(y)=C$

Luego $f(x,y)=\frac{y^2e^{2x}}{2}(x^2+y^2)+C$

$$\therefore\quad y^2 e^{2x}(x^2+y^2)=k$$

4. $2y\,dx - x\,dy = xy^3\,dy$

Solución

$2y\,dx - (x + xy^3)\,dy = 0$ ....(1)

$$\begin{cases} M = 2y \\ N = -(x+xy^3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -1-y^3 \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial no es exacta.

Sea $u(x,y) = x^m y^n$ un factor integrante, entonces.

$2x^m y^{n+1}\,dx - (x^{m+1} y^n + x^{m+1} y^{n+3})\,dy = 0$

para que sea exacta debe cumplirse $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$$\begin{cases} M = 2x^m y^{n+1} \\ N = -(x^{m+1}y^n + x^{m+1}y^{n+3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2(n+1)x^m y^n \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -(m+1)(x^m y^n + x^m y^{n+3}) \end{cases}$$

igualando tenemos

$2(n+1)x^m y^n = -(m+1)x^m y^n - (m+1)x^m y^{n+3}$

Luego: $\begin{cases} 2(n+1) = -(m+1) \\ -(m+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = -1 \end{cases}$

por lo tanto el factor integrante es $u(x,y) = \dfrac{1}{xy}$ que al multiplicar a la ecuación (1)

se tiene: $\dfrac{2}{x}dx - (\dfrac{1}{y} + y^2)dy = 0$, que es exacta, en efecto:

$$\begin{cases} M = \dfrac{2}{x} \\ N = -(\dfrac{1}{y} + y^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

entonces $\exists\ f(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$, de donde $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{2}{x}$

integrando respecto a x.

$f(x,y) = \int \dfrac{2}{x}\,dx + g(y) = 2Lnx + g(y)$, derivando

$\dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial y} = g'(y)$, pero como $\dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial y} = N$ entonces

$N = g'(y) \Rightarrow -(\dfrac{1}{y} + y^2) = g'(y) \Rightarrow g(y) = -(Lny + y^3/3) + C$

Luego $f(x,y) = 2\ Ln\ x - Ln\ y - y^3/3 + C$

$$\therefore\quad 2Lnx - Lny - y^3/3 = K$$

5. $e^x\,dx + (e^x \operatorname{ctg} y + 2y \operatorname{cosec} y)\,dy = 0$

Solución

$$\begin{cases} M = e^x \\ N = e^x \operatorname{ctg} y + 2y \operatorname{cosec} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = e^x \cot y \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial es exacta,

Sea $g(y) = -\dfrac{1}{M}(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}) = -\dfrac{0 - e^x \operatorname{ctg} y}{e^x}$

$g(y) = \operatorname{ctg} y \Rightarrow u(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \operatorname{ctg} y\,dy}$

$u(y) = e^{Ln(\operatorname{sen} y)} = \operatorname{sen} y \Rightarrow u(y) = \operatorname{sen} y$

ahora multiplicamos a la ecuación diferencial por u (y) = sen y, es decir:

$e^x \operatorname{sen}\ y\,dx + (e^x \cos y + 2y)\,dy = 0$

que es una ecuación diferencial exacta.

$$\text{en efecto: } \begin{cases} M = e^x \operatorname{sen} y \\ N = e^x \cos y + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial es exacta.

entonces $\exists\ f(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial x} = M$, de donde

$\dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y$, integrando respecto a x.

$f(x,y) = \int e^x \operatorname{sen} y dx + g(y) = e^x \operatorname{sen} y + g(y)$ derivando

$\dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial x} = e^x \cos y + g'(y)$, pero como $\dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial y} = N$, entonces

$N = e^x \cos y + g'(y)$ de donde se tiene:

$e^x \cos y + g'(y) = e^x \cos y + 2y \Rightarrow g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2 + C$

Luego $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + y^2 + C$

$$\therefore\ e^x \operatorname{sen} y + y^2 = K$$

6. $(x \cos y - y \operatorname{sen} y)\,dy + (x \operatorname{sen} y + y \cos y)\,dx = 0$

Solución

$$\begin{cases} M = x \operatorname{sen} y + y \cos y \\ N = x \cos y - y \operatorname{sen} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = x \cos y + \cos y - y \operatorname{sen} y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = \cos y \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial no es exacta.

$$\text{Sea } f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{x \cos y + \cos y - y \operatorname{sen} y - \cos y}{x \cos y - y \operatorname{sen} y} = 1$$

Luego el factor de integración es $u(x) = e^{\int f(x)dx} = e^x$, ahora a la ecuación diferencial, lo multiplicamos por el factor integrante $u(x) = e^x$, es decir:

$(e^x x \cos y - e^x y \operatorname{sen} y)dy + (x e^x \operatorname{sen} y + y e^x \cos y)dx = 0$

que es una ecuación diferencial exacta, en efecto.

$$\begin{cases} M = e^x x \operatorname{sen} y + e^x y \cos y \\ N = e^x x \cos y - e^x y \operatorname{sen} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = xe^x \cos y + e^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = xe^x \cos y + e^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial es exacta.

entonces $\exists\ f(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$, de donde

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = xe^x \operatorname{sen} y + ye^x \cos y$ integrando respecto a x.

$f(x,y) = \int (xe^x \operatorname{sen} y + ye^x \cos y)dx + g(y)$

$f(x,y) = xe^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y + ye^x \cos y + g(y)$ derivando

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^x \cos y - e^x \cos y + e^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y + g'(y)$

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y + g'(y)$, pero como $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$

$N = xe^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y + g'(y)$, de donde se tiene:

$x e^x \cos y - y e^x \operatorname{sen} y + g'(y) = x e^x \cos y - e^x y \operatorname{sen} y \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C.$

Luego $f(x,y) = x e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y + y e^x \cos y + C$

$$\therefore \quad x e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y + y e^x \cos y = K$$

Observación: Veremos un caso particular de factor integrante, por ejemplo, hallar un factor integrante $u = \varphi\ (x + y^2)$ de la ecuación diferencial $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0$ y luego resolver la ecuación.

Solución

$$\begin{cases} M = 3y^2 - x \\ N = 2y^3 - 6xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 6y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -6y \end{cases} \quad como \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

La ecuación no es exacta, ahora calculamos el factor integrante de la forma $u = \varphi\ (x + y^2) = \varphi\ (z)$ donde $z = x + y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$

Como $\quad \dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = N\dfrac{\partial u}{u\partial x} - M\dfrac{\partial u}{u\partial y} \quad$ *entonces*

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\frac{\partial\ \ln\ (u)}{\partial x} - M\frac{\partial\ \ln u}{\partial y} \quad ....(1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\ \ln u}{\partial x} = \dfrac{d \ln u}{dz}\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{d \ln u}{dz} \\ \dfrac{\partial\ \ln u}{\partial y} = \dfrac{d \ln u}{dz}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y\dfrac{d \ln u}{dz} \end{cases} \quad ....(2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\frac{d \ln u}{dz} - M2y\frac{d \ln u}{dz}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = (N - 2yM)\frac{d \ln u}{dz}$$

$$6y + 6y = (2y^3 - 6xy - 6y^3 + 2xy)\frac{d \ln u}{dz} \Rightarrow 12y = -4y(y^2 + x)\frac{d \ln u}{dz}$$

$$\frac{d \ln u}{dz} = -\frac{3}{y^2 + x} = -\frac{3}{z} \quad entonces \quad d(\ln u) = -3\frac{dz}{z}$$

integrando se tiene: $\ln u = -3 \ln z = \ln z^{-3}$

levantando el logaritmo $u = \dfrac{1}{z^3} = \dfrac{1}{(y^2 + x)^3}$

multiplicando a la ecuación diferencial se tiene:

$\dfrac{3y^2 - x}{(y^2 + x)^3}dx + \dfrac{2y^3 - 6xy}{(y^2 + x)^3}dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta. La solución se obtiene agrupando, tenemos $d\left(\dfrac{x - y^2}{(x + y^2)^2}\right) = 0$ integrando

$$\frac{x - y^2}{(x + y^2)^2} = C \Rightarrow \quad \therefore \quad x - y^2 = c(x + y^2)^2$$

a. **Combinación Integrable.**

En una ecuación diferencial M (x,y) dx + N (x,y) dy = 0, para encontrar un factor de integración en muchos casos es dificultoso, sin embargo mediante el reconocimiento de ciertas diferenciales exactas comunes, se puede obtener la solución en forma mucho más práctica, a esta forma de agrupamiento de los términos de una ecuación diferencial denominaremos combinación integrable. Esta forma de resolver las ecuaciones diferenciales es mucho más rápido, sin embargo requiere de un buen conocimiento de diferenciales y una cierta pericia en determinar cómo deben agruparse los términos y para esto daremos algunas sugerencias de diferenciales exactas.

1° $\quad xdy + ydx = d(xy) \qquad$ 2° $\quad xdx \pm ydy = \dfrac{1}{2}d(x^2 \pm y^2)$

3° $\quad \dfrac{xdy - ydx}{x^2} = d(y/x) \qquad$ 4° $\quad \dfrac{xdy - ydx}{y^2} = d(-\dfrac{x}{y})$

5° $\dfrac{xdy - ydx}{xy} = d(Ln(\dfrac{y}{x}))$ 6° $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d(arc.\text{tg}(y/x))$

7° $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 - y^2} = \dfrac{1}{2} d(Ln(\dfrac{x+y}{x-y}))$ 8° $\dfrac{xdy - ydx}{(x-y)^2} = \dfrac{1}{2} d(\dfrac{x+y}{x-y})$

9° $\dfrac{xdy - ydx}{x\sqrt{x^2 - y^2}} = d(arc.\text{sen}(\dfrac{y}{x}))$ 10° $\dfrac{ydx - xdy}{(x+y)^2} = \dfrac{1}{2} d(\dfrac{x-y}{x+y})$

11° $\dfrac{x\,dy + y\,dx}{x^2 y^2} = d(-\dfrac{1}{xy})$ 12° $\dfrac{dx + dy}{x+y} = d(Ln(x+y))$

13° $\dfrac{xdy + ydx}{xy} = d(Ln(xy))$

Ejemplos: Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1. $(x^2 + y^2)(xdy + ydx) = xy\,(xdy - ydx)$

Solución

La ecuación diferencial dada expresaremos así:

$\dfrac{xdy + ydx}{xy} = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, de acuerdo a las sugencias 6° y 13° se tiene:

$dLn(xy) = d(\text{arctg}(\dfrac{y}{x}))$ integrando se tiene:

$\int dLn(xy) = \int d(arc.\text{tg}(y/x))dx + C$, de donde

$\text{Ln}(xy) = \text{arc.tg}(y/x) + C$

2. $3ydx + 2xdy + 4xy^2 dx + 3x^2 y\,dy = 0$

Solución

Multiplicando a la ecuación dada por $x^2 y$, es decir:

$3x^2 y^2 dx + 2x^3 ydy + 4x^3 y^3 dx + 3x^4 y^2 dy = 0$

de acuerdo a la sugerencia 1° se tiene:

$d(x^3 y^2)d + d(x^4 y^3) = 0$ integrando se tiene:

$\int d(x^3 y^2) + \int (dx^4 y^3) = C$ de donde

$\therefore\ x^3 y^2 + x^4 y^3 = C$

3. $xdy - ydx = x^2 \sqrt{x^2 - y^2}\,dx$

Solución

A la ecuación diferencial dada, escribiremos así:

$\dfrac{xdy - ydx}{x\sqrt{x^2 - y^2}} = xdx$, de acuerdo a la sugerencia 9° se tiene:

$d(\text{arcsen}(\dfrac{y}{x})) = d(\dfrac{x^2}{2})$ integrando se tiene:

$\int d(\text{arcsen}(\dfrac{y}{x})) = \int d(\dfrac{x^2}{2}) + C$, de donde

$\therefore\ \text{arcsen}\dfrac{y}{x} = \dfrac{x^2}{2} + C$

4. $x^3\,dy - x^2\,ydx = x^5\,ydx$

Solución

A la ecuación diferencial dada expresaremos:

$xdy - ydx = x^3 ydx$, para $x \neq 0$

$\dfrac{xdy - ydx}{xy} = x^2 dx$, de acuerdo a la sugerencia 5° se tiene:

$dLn(\dfrac{y}{x}) = d(\dfrac{x^3}{3})$ integrando.

$\int dLn(\dfrac{y}{x}) = \int d(\dfrac{x^3}{3}) + C$, de donde

$\therefore\ Ln(\dfrac{y}{x}) = \dfrac{x^3}{3} + C$

5. $\sqrt{y^2-1}(1-y\sqrt{x^2-1})dx+\sqrt{x^2-1}(1-x\sqrt{y^2-1})dy=0$

Solución

La ecuación diferencial dada expresaremos así:

$$\sqrt{y^2-1}dx-y\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}dx+\sqrt{x^2-1}dy-x\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}dy=0$$

$$\sqrt{y^2-1}dx+\sqrt{x^2-1}dy-\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}(ydx+xdy)=0$$

$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}-(ydx+xdy)=0$; de acuerdo a las sugerencias del 1° se tiene:

$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}-d(xy)=0$, integrando

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}-\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}-\int d(xy)=C$, de donde:

$Ln|x+\sqrt{x^2-1}|-Ln|y+\sqrt{y^2-1}|-xy=C$............(1)

por lo tanto (1) expresaremos así:

arccoshx - arccoshy = xy + C, de donde

cosh (arccoshx - arccoshy) = cosh (xy + C)

xy + senh (arccoshx). senh (arccoshy) = cosh (xy + C)

además se sabe que , senhx = $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ Luego se tiene:

$$xy+(\frac{e^{\operatorname{arccos} hx}-e^{-\operatorname{arccos} hx}}{2})(\frac{e^{\operatorname{arcsen} hy}-e^{-\operatorname{arcsen} hy}}{2})=\cosh(xy+C)$$

6. $\frac{dy}{dx}=\frac{y(xy+1)}{y(1-x^2)-x}$. Para x = 1; y = -2

Solución

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(xy+1)}{y(1-x^2)-x}\Rightarrow\left[y(1-x^2)-x\right]dy=y(xy+1)dx$$

$ydy - yx^2\,dy - xdy = xy^2\,dx + ydx$

$ydy - (yx^2\,dy + xy^2\,dx) = xdy + ydx$

mediante la sugerencia de 1° se tiene:

$ydy-d(\frac{x^2y^2}{2})=d(xy)$ integrando

$\int ydy-\int d(\frac{x^2y^2}{2})=\int d(xy)+K$, de donde $y^2 - x^2y^2 = 2xy + C$

para x = 1, y = -2, se tiene 4 - 4 = -4 + C ⇒ C = 4

Luego la solución particular es: $(1 - x^2)\,y^2 - 2xy = 4$

7. $(y + x\,(x^2 + y^2))dx + (y\,(x^2 + y^2) - x)dy = 0$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos así:

$ydx + x(x^2 + y^2)dx + y(x^2 + y^2)dy - xdy = 0$, ahora agrupamos

$-\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+xdx+ydy=0$, mediante la sugerencia de 2° y 6° se tiene:

$-d(arc.\text{tg}(y/x))+\frac{1}{2}d(x^2+y^2)=0$, integrando

$-\int d(arc.\text{tg}(y/x))+\frac{1}{2}\int d(x^2+y^2)=C$,

∴ $-2\,\text{arctg}\,(y/x) + x^2 + y^2 = K$

8. $arc.\text{sen}\,ydx+\frac{x+2\sqrt{1-y^2}\cos y}{\sqrt{1-y^2}}dy=0$

Solución

A la ecuación diferencial dada expresaremos así:

$$arc.\operatorname{sen} y dx + \frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + 2\cos y dy = 0$$

d (x .arc.sen y) + 2 cos y dy = 0, integrando

$$\int d(x.arc.\operatorname{sen} y) + \int 2\cos y dy = C \quad \text{de donde}$$

x arc.sen y + 2 sen y = C

b. Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $(xy^3 + 1)\,dx + x^2 y^2\,dy = 0$ — Rpta: $2x^3 y^3 + 3x^2 = c$
2. $y^2\,dx + x^2\,dy - 2xy\,dy = 0$ — Rpta: $xy - y^2 = Kx$
3. $(x^2 + y)\,dx - xdy = 0$ — Rpta: $x^2 - y = Kx$
4. $(2xy^2 - 3y^3)\,dx + (7 - 3xy^2)\,dy = 0$ — Rpta: $x^2 y - 3xy^2 - 7 = Ky$
5. $ydx + (2x - y e^y)\,dy = 0$ — Rpta: $xy^2 - y^2 e^y + 2y e^y - 2e^y = K$
6. $(y^4 + x^3)\,dx + 8xy^3\,dy = 0$ — Rpta: $\sqrt{x}(7y^4 + x^3) = K$
7. $(5x^3 + 3xy + 2y^2)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy = 0$ — Rpta: $x^5 + x^3 y + x^2 y^2 = K$
8. $x^2 y^2\,dx + (x^3 y + y + 3)\,dy = 0$ — Rpta: $\frac{x^3 y^3 + y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} = c$
9. $x^2\,dx - (x^3 y^2 + y^2)\,dy = 0$ — Rpta: $e^{-y^3}(x^3 + 3) = c$
10. $(xy^2 + x^2 y^2 + 3)\,dx + x^2 y\,dy = 0$ — Rpta: $e^{2x}(x^2 y^2 + 3) = c$
11. $e^x (x + 1)\,dx + (e^y y - x e^x)\,dy = 0$ — Rpta: $2x e^{x-y} + y^2 = c$
12. $(x - x^2 y)\,dy - ydx = 0$ — Rpta: $2y - xy^2 - cx = 0$
13. $(5x^3 y^2 + 2y)\,dx + (3x^4 y + 2x)\,dy = 0$ — Rpta: $x^5 y^3 + x^2 y^2 = c$
14. $(e^x + x e^y)\,dx + x e^y\,dy = 0$ — Rpta: $e^{x+y} + \int_0^x \frac{e^{2t}}{t}dt = K$
15. $(3x^2 y + 2xy + y^3)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$ — Rpta: $(3x^2 y + y^3)e^{3x} = c$
16. $dx + (\frac{x}{y} - \operatorname{sen} y)dy = 0$ — Rpta: $xy + y\cos y - \operatorname{sen} y = c$
17. $ydx + (2xy - e^{-2y})\,dy = 0$ — Rpta: $x e^{2y} - \operatorname{Ln}|y| = c$
18. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0$ — Rpta: $x^2 + y^2 = c\,e^{-x}$
19. $(3x^2 - y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0$ — Rpta: $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$
20. $(xy - 1)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$ — Rpta: $xy - \operatorname{Ln}|x| - \frac{y^2}{2} = c$
21. $2y(x^2 - y + x)\,dx + (x^2 - 2y)\,dy = 0$ — Rpta: $y(x^2 - y) = ce^{-2x}$
22. $y(4x + y)\,dx - 2(x^2 - y)\,dy = 0$ — Rpta: $2x^2 + xy + 2y\operatorname{Ln}|y| = cy$
23. $(2y^2 + 3xy - 2y + 6x)\,dx + x(x + 2y - 1)\,dy = 0$ — Rpta: $x^2(y^2 + xy - y + 2x) = c$
24. $y^2\,dx + (3xy + y^2 - 1)\,dy = 0$ — Rpta: $y^2(y^2 + 4xy - 2) = c$
25. $2y(x + y + 2)\,dx + (y^2 - x^2 - 4x - 1)\,dy = 0$ — Rpta: $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 1 = cy$
26. $2(2y^2 + 5xy - 2y + 4)\,dx + x(2x + 2y - 1)\,dy = 0$ — Rpta: $x^4(y^2 + 2xy - y + 2) = c$
27. $3(x^2 + y^2)\,dx + x(x^2 + 3y^2 + 6y)\,dy = 0$ — Rpta: $x(x^2 + 3y^2) = ce^{-y}$
28. $y(8x - 9y)\,dx + 2x(x - 3y)\,dy = 0$ — Rpta: $x^3 y(2x - 3y) = c$
29. $y(1 + xy)\,dx - xdy = 0$ — Rpta: $x^2 + \frac{2x}{y} = c$
30. $dx + (x\,\operatorname{tg} y - 2\sec y)\,dy = 0$ — Rpta: $x\sec y - 2\operatorname{tg} y = c$
31. $(x^4 \operatorname{Ln} x - 2xy^3)\,dx + 3x^2 y^2\,dy = 0$ — Rpta: $y^3 + x^3(\operatorname{Ln}|x| - 1) = cx^2$

32. $(x + y^2)\, dx - 2xy\, dy = 0$ Rpta: $x \operatorname{Ln}|x| - y^2 = cx$

33. $(2x^2 y + 2y + 5)\, dx + (2x^3 + 2x)\, dy = 0$ Rpta: $5 \operatorname{arc\,tg} x + 2xy = c$

34. $(x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)\, dx + \cos y\, dy = 0$

Rpta: $2 e^x \operatorname{sen} y + 2 e^x (x - 1) + e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) = c$

35. $(1 + xy)dx + x(\frac{1}{y} + x)dy = 0$ Rpta: $K = xy\, e^{xy}$

36. $(\sec x + y \operatorname{tg} x)\, dx + dy = 0$ Rpta: $y \sec x + \operatorname{tg} x = c$

37. $(2(x + y) \sec^2 x + \operatorname{tg} x)\, dx + \operatorname{tg} x\, dy = 0$ Rpta: $(x + y) \operatorname{tg}^2 x = c$

38. $\frac{y}{x}dx + (y^3 - Lnx)dy = 0$ Rpta: $\frac{y^2}{2} + \frac{Ln|x|}{y} = c$

39. $\operatorname{sen} x \,.\, (2 + 3y \operatorname{sen}^2 x)\, dx + \sec x\, dy = 0$

Rpta: $ye^{\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 x} + 2\int (\operatorname{sen} x \cos x)e^{\frac{3}{4}\operatorname{sen}^4 x} dx + c$

40. $y \operatorname{sen} xy dx - (\frac{\cos xy}{y} - x \operatorname{sen} xy)dy = 0$ Rpta: $y \cos xy = c$

41. $(x \cos y - y \operatorname{sen} y)\, dy + (x \operatorname{sen} y + y \cos y)\, dx = 0$

Rpta: $(x \operatorname{sen} y - y \cos y - \operatorname{sen} y)\, e^x = c$

42. $\frac{1}{x}dx - (1 + xy^2)dy = 0$ Rpta: $e^y(y^2 - 2y + 2 + \frac{1}{x}) = c, \quad u = \frac{e^y}{x}$

43. $(x^2 + 2x + y)\, dx + (1 - x^2 - y)\, dy = 0$ Rpta: $e^{x-y}(x^2 + y) = c,\ u = e^{x-y}$

44. $(\cos x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)\, dx + (\cos x + \operatorname{sen} y + \cos y)\, dy = 0$

Rpta: $e^{x+y}(\cos x + \operatorname{sen} y) = c,\ u = e^{x+y}$

45. $(\frac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x} \operatorname{sen} x)dx + \frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y} dy = 0$

Rpta: $e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x = c,\ u = y\, e^x$

46. $(-3y^4 + x^3 y)\, dx + (xy^3 - 3x^4)\, dy = 0$ Rpta: $y^3 + x^3 = cx^{9/4} y^{9/4},\ u = x^m y^n$

47. $y(2x^2 + y)\, dx + x(y - x^2)\, dy = 0$ Rpta: $\frac{x^2}{y} + \ln xy = C$

48. $2ydx + 3xdy = 3x^{-1} dy$ Rpta: $y^3 (x^2 - 1) = c$

49. $xdy + 2ydx = x^3 y^3 dy$ Rpta: $x^2 y (x^2 + c) + 2 = 0$

50. $y(4xy + 3)\, dx + x(3xy + 2)\, dy = 0$ Rpta: $x^4 y^3 + x^3 y^2 = C$

51. $4xdy - 3ydx = y^{-3} xdx$ Rpta: $2y^4 + x = cx^3$

52. $ydx + 2xdy = x^3 ydx$ Rpta: $3 \operatorname{Ln}(xy^2) = x^3 + c$

53. $ydx - 2xdy = xy^5 dy$ Rpta: $5 \operatorname{Ln}(xy^{-2}) = y^5 + c$

54. $(\operatorname{sen} x - x \cos x)dx + 2(\frac{x^2}{y^2} - \frac{x \operatorname{sen} x}{y})dy = 0$

Rpta: $2xy - y^2 \operatorname{sen} x = cx,\ u(x,y) = x^{-2} y^2$

55. $3ydx - 2xdy = x^4 y^2 dx$ Rpta: $11x^{3/2} - yx^{11/2} = cy$

56. $3ydx + 4xdy = 5x^2 y^{-3} dx$ Rpta: $x^3 (y^4 - x^2) = c$

57. $(4xy^2 + 6y)\, dx + (5x^2 y + 8x)\, dy = 0$ Rpta: $x^3 y^4 (xy + 1) = c$

58. $[y^2 - 2x^2 (x + y)^2 - y(x + y)^2]\, dx + [y^2 - 2x^2 (x + y)^2 + x(x + y)^2]\, dy = 0$

59. $(2y + 3x^2 y^3)\, dx + (3x + 5x^3 y^2)\, dy = 0,\ u(x,y) = x^{-9} y^{-13}$

60. $(2x\, e^y + y^2\, e^x + 2x)\, dx + (x^2 e^y + 2^y e^x)\, dy = 0$ Rpta: $x^2 e^y + y^2 e^x + x^2 = c$

61. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2 - 2y}{y^2 - x^2 - 2x}$ Rpta: $(x + y)\, e^{x+y} = c\,(x - y)$

62. $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 - y^2}\, dy$ Rpta: $y = x \cdot \operatorname{sen}(y + c)$

63. $ydx = (2x^2 y^3 - x)\, dy,\ y(1) = 1$ Rpta: $xy^3 - 2xy + 1 = 0$

64. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x y}{e^x + 2y},\ y(0) = 1$ Rpta: $e^x = y(1 + 2 \operatorname{Ln} y)$

65. $[y^4(x^3 + x^2 - 2x + 1) + (x^2 y + y^3 + xy^2)]\,dx - (x^3 + xy^2 + x^2 y)\,dy = 0$

Rpta: $(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12x)\,y^3 + 12xy^2 + 6x^2 y + 4x^3 = cy^3$

66. $xdy - ydx = x^2 y\,dy$ Rpta: $2y = xy^2 + c$

67. $(x - 2y^3)\,dy = ydx$ Rpta: $x = cy - y^3$

68. $xdy + ydx = 3x^2\,dx,\ y(2) = 1$ Rpta: $xy = x^3 - 6$

69. $x^2 D_x y - xy = x^2 - y^2,\ y(1) = 0$ Rpta: $x + y = x^2(x - y)$

70. $xdy - ydx + (y^2 - 1)\,dy = 0$ Rpta: $y^2 - x + 1 = cy$

71. $xdy + ydx = x^2 y\,dy$ Rpta: $x^{-1}y^{-1} + \operatorname{Ln} y = c$

72. $y(2 + xy)\,dx + x(1 + xy)\,dy = 0$ Rpta: $x^2 y e^{xy} = K$

73. $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0$ Rpta: $\sqrt{x^2 + y^2} + \dfrac{y}{x} = c$

74. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^y}{2y - xe^y}$ Rpta: $y^2 = x e^y + c$

75. $xdy = (x^2 + y^2 + y)\,dx$ Rpta: $y = x\,\operatorname{tg}(x + c)$

76. $e^x(y^3 + xy^3 + 1)\,dx + 3y^2(xe^x - 6)\,dy = 0$ Rpta: $xe^x y^3 + e^x - 6y^3 = c$

77. $xdy + ydx = y^2\,dx$ Rpta: $y(1 + cx) = 1$

78. $xdy - ydx + (x^2 + y^2)\,dx = 0$ Rpta: $y = x\,\operatorname{tg}(c - x)$

79. $3xdy = 2ydx - xy\cos x\,dx$ Rpta: $x^2 = cy^3 e^{\operatorname{sen} x}$

80. $e^x(x + 1)\,dx + (ye^y - xe^x)\,dy = 0$ Rpta: $2xe^{x-y} + y^2 = c$

81. $xdy - ydx = (1 + y^2)\,dy$ Rpta: $-\dfrac{x}{y} = -\dfrac{1}{y} + y + c$

82. $xdy = (x^5 + x^3 y^2 + y)\,dx$ Rpta: $arc\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{y}\right) = -\dfrac{x^4}{4} + c$

83. $\left(\dfrac{2x}{y} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$ Rpta: $\dfrac{x^2}{y} + arc.\operatorname{tg}\ (y/x) = c$

84. $xdy - ydx = 2x^2 y^2\,dy,\ y(1) = -2$ Rpta: $3y - 2xy^3 - 10x = 0$

85. $y(2x + y^3)\,dx - x(2x - y^3)\,dy = 0$ Rpta: $\dfrac{x^2}{y^2} + xy = c$

86. $y(x^3 - y^5)\,dx - x(x^3 + y^5)\,dy = 0$ Rpta: $x^4 = y^4(c + xy)$

87. $(x^3 y^3 + 1)\,dx + x^4 y^2\,dy = 0$ Rpta: $x^3 y^3 = -3\operatorname{Ln}(xc)$

88. $y(y^3 - x)\,dx + x(y^3 + x)\,dy = 0$ Rpta: $2xy^3 - x^2 = cy^2$

89. $x^2(x + y)^2(dx + dy) = m(xdy - ydx)$ Rpta: $x(x + y)^3 = 3my$

90. $(2x^2 + y^2 - 3)(xdy + ydx) = (xy)^3(4xdx + 2ydy)$

Rpta: $(xy)^{-2} + 2\operatorname{Ln}(2x^2 + y^2 - 3) = c$

91. $xdy - ydx = y^3(x^2 + y^2)\,dy$ Rpta. $arc\ \operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = \dfrac{y^4}{4} + c$

92. $y(x^4 - y^2)\,dx + x(x^4 + y^2)\,dy = 0$ Rpta: $y(3x^4 + y^2) = cx^3$

93. $y(x^3 e^{xy} - y)\,dx + x(y + x^3 e^{xy})\,dy = 0$ Rpta: $2x^2 e^{xy} + y^2 = cx^2$

94. $y^2(1 - x^2)\,dx + x(x^2 y + 2x + y)\,dy = 0$ Rpta: $x^2 y + x + y = cxy^2$

95. $y(x^2 y^2 - m)\,dx + x(x^2 y^2 + n)\,dy = 0$ Rpta: $x^2 y^2 = 2\,Ln\left(\dfrac{cx^m}{y^n}\right)$

96. $xdx + ydy = (x^2 + y^2)^3(xdy - ydx)$ Rpta. $6arc\ \operatorname{tg}\ \left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^3} = c$

97. $ydx - xdy = (x^2 + y^2)^2(xdx + ydy)$ Rpta: $arc\ \operatorname{tg}\ \left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + c$

98. $xdy - ydx = \sqrt{4x^2 + 9y^2}\,(4xdx + 9ydy)$ Rpta: $\operatorname{arctg}\dfrac{3y}{2x} = 6(4x^2 + 9y^2)^{1/2} + C$

99. $y(2 - 3xy)\,dx - xdy = 0$ Rpta: $x^2(1 - xy) = cy$

100. $y(2x + y^2)\,dx + x(y^2 - x)\,dy = 0$ Rpta: $x(x + y^2) = cy$

101. $2x^5 y' = y(3x^4 + y^2)$ Rpta: $x^4 = y^2(1 + cx)$

102. $(x^n y^{n+1} + ay)\,dx + (x^{n+1} y^n + bx)\,dy = 0$

Rpta: si $n \neq 0$, $x^n y^n = n \operatorname{Ln}(cx^{-a} y^{-b})$, si $n = 0$, $xy = cy^{-a} y^{-b}$

103. $(x^{n+1} y^n + ay)\,dx + (x^n y^{n+1} + ax)\,dy = 0$

Rpta: si $n \neq 1$, $(n-1)(xy)^{n-1}(x^2 + y^2 - c) = 2a$, si $n = 1$, $x^2 + y^2 - c = -2a \operatorname{Ln}(xy)$

104. $xdy + ydx = xy^3\,dx$ Rpta: $\dfrac{1}{(xy)^2} = \dfrac{2}{x} + c$

105. $xdy - ydx = (xy)\,y^2\,dy$ Rpta: $3 \operatorname{Ln}(y/x) = y^3 + c$

106. $xdy - ydx = (x^2 + xy - 2y^2)\,dx$ Rpta: $Ln(\dfrac{x + 2y}{x - y}) = 3x + c$

107. $y(ydx - xdy) + 3\sqrt{y^4 - x^4}\,(ydx + xdy) = 0$

108. $ye^{-x/y}\,dx - (xe^{-x/y} + y^3)\,dy = 0$ Rpta: $e^{-x/y} + y^2/2 = c$

109. $e^x(\cos y\,dx - \operatorname{sen} y\,dy) = 0$ Rpta: $e^x \cos y = c$

110. $(x\sqrt{x^2 + y^2} + y)dx + (y\sqrt{x^2 + y^2} + x)dy = 0$ Rpta: $\dfrac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{3} + xy = K$

111. $\dfrac{2\cos(xy)}{\operatorname{sen}(xy)}(xdy + ydx) + e^{\operatorname{sen} x}.e^{\operatorname{sen} y}(\cos x\,dx + \cos y\,dy) = 0$

Rpta: $2 \operatorname{Ln}(\operatorname{sen}(xy)) + e^{\operatorname{sen} x}.e^{\operatorname{sen} y} = c$

112. $(3x^2 \operatorname{Ln} x + x^2 + y)\,dx + xdy = 0$ Rpta: $xy + x^3 \operatorname{Ln} x = c$

113. $y(\dfrac{1}{x^2 + y^2} - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - y^2}})dx + (\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \dfrac{x}{x^2 + y^2})dy = 0$

Rpta: $\operatorname{arc\,tg} y/x + \operatorname{arc\,sen} y/x = K$

114. $y[\operatorname{sen}(x + y) + x\cos(x + y)]\,dx + x[\operatorname{sen}(x + y) + y\cos(x + y)]\,dy = 0$

Rpta: $xy \operatorname{sen}(x + y) = c$

115. $e^{xy}(ydx + xdy) + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}(xdx - ydy) + \sqrt{x^2 - y^2}\,dy = 0$

Rpta: $e^{xy} + y\sqrt{x^2 - y^2} = c$

116. $xy^2(x^6 - y^6)(2ydx + 3xdy) = 24x^2 y^3 (x^5\,dx - y^5\,dy)$ Rpta: $x^2 y^3 = (x^6 - y^6)^4 K$

117. $[2xy \operatorname{sen}(x + y) + y \sec(x + y)]\,dx + [2xy \operatorname{sen}(x + y) + x \sec(x + y)]\,dy = 0$

Rpta: $\operatorname{sen}^2(x + y) + \operatorname{Ln}(xy) = c$

118. $2ydx - xdy = xy^3\,dy$ Rpta: $3 \operatorname{Ln}(x^2 y^{-1}) = y^3 + c$

119. $ydx + xdy = \sqrt{x^2 + y^2}\,(xdx + ydy)$ Rpta: $3xy = (x^2 + y^2)^{3/2} + c$

120. Probar que si $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = N\dfrac{k}{x}$ entonces x^k es un factor integrante de $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

121. Demostrar que si la ecuación diferencial $(axy - b)\,ydx + (cxy - d)\,xdy = 0$ es dividida entre $xy[(axy - b) - (cxy - d)]$ entonces es exacta.

122. Resolver la ecuación diferencial usando el factor de integración

$u(x,y) = [xy(2x + y)]^{-1}$, $(3xy + y^2) + xy(2x + y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

123. $y[2(x + y) + (1 + x^2)\operatorname{arc\,tg} x]\,dx + (x^3 + 2x^2 y + x + 2y)\operatorname{arc\,tg} x.dy = 0$

124. Considerando una ecuación diferencial de la forma

$[y + x f(x^2 + y^2)]\,dx + [y f(x^2 + y^2) - x]\,dy = 0$

a. Demostrar que una ecuación diferencial de esta forma no es exacta.

b. Demostrar que $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ es un factor integrante de una ecuación diferencial de esta forma.

125. Resolver la ecuación diferencial $[y + x(x^2 + y^2)^2]\,dx + [y(x^2 + y^2)^2 - x]\,dy = 0$

Rpta: $4 arc.\text{tg}\dfrac{x}{y} + (x^2+y^2)^2 = K$

126. $y(x^2+y^2-1)\,dx + x(x^2+y^2+1)\,dy = 0$, $u = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

Rpta: $xy + arc.\text{tg}(y/x) = c$

127. $(x^2+y^2+1)\,dx - 2xy\,dy = 0$, $u(x,y) = \varphi(y^2-x^2)$

Rpta: $1+y^2-x^2 = cx$, $u_1 = \dfrac{1}{(1+y^2-x^2)^2}$ $u_2 = \dfrac{1}{x^2}$

128. $x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0$, $u = \varphi(x^2+y^2)$

Rpta: $\dfrac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = c$, $u = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

129. $(3y^2-x)\,dx + (2y^3-6xy)\,dy = 0$, $u = \varphi(x+y^2)$

Rpta: $(x+y^2)^2 c = x - y^2$, $u = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^3}$

130. $(y - xy^2 \text{Ln}\, x)\,dx + x\,dy = 0$, $u = \varphi(xy)$ Rpta: $2 + xy\text{Ln}^2 y = cxy$, $u = \dfrac{1}{x^2y^2}$

131. $(xy^2-y)\,dx + (xy-1)\,x\,dy = 0$ Rpta: $\text{Ln}(Kxy) = -\dfrac{1}{xy}$

132. $\left(\dfrac{1}{x-y} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\dfrac{1}{y-x} - \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$

Rpta: $\text{Ln}|x-y| - arc.\text{tg}\, y/x = c$

133. $[y + x(x^2+y^2)]\,dx + [y(x^2+y^2) - x]\,dy = 0$ Rpta: $x^2+y^2 - 2\, arc.\text{tg}\, y/x = K$

134. $x(1-\sqrt{x^2+y^2})\,dx + y\,dy = 0$ Rpta: $\sqrt{x^2+y^2} = x^2/2 + c$

135. $(7x^4y - 3y^8)\,dx + (2x^5 - 9xy^7)\,dy = 0$ Rpta: $x^7y^2 - x^3y^9 = K$

136. $arc.\text{sen}\, y\,dx + \dfrac{x + 2\sqrt{1-y^2}\cos y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = 0$ Rpta: $x\, arc.\text{sen}\, y + 2\,\text{sen}\, y = c$

137. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3 - x^3 - x^2y + xy^2 + 2x}{x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 + 2y}$ Rpta: $K(x^2-y^2) = e^{\frac{(x+y)^2}{2}}$

138. Aplicando el ejercicio 122 resolver:

$(y^4+x^3)\,dx + 8xy^3\,dy = 0$ Rpta: $x^{1/2}(7y^4+x^3) = c$

139. $(5x^3+3xy+2y^2)\,dx + (x^2+2xy)\,dy = 0$ Rpta: $x^5 + x^3y + x^2y^2 = c$

140. Demostrar que $\dfrac{1}{Mx+Ny}$, donde $Mx + Ny \neq 0$, es un factor integrante de la ecuación diferencial homogénea $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

141. Demostrar que $\dfrac{1}{Mx+Ny}$, donde $Mx - Ny \neq 0$, es un factor integrante para la ecuación diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = y\,f(xy)\,dx + x\,g(xy)\,dy$

142. $(x^4+y^4)\,dx - xy^3\,dy = 0$ Rpta: $y^4 = 4x^4\,\text{Ln}\, x + cx^4$

143. $y^2\,dx + (x^2 - xy - y^2)\,dy = 0$ Rpta: $(x-y)\,y^2 = c\,(x+y)$

144. $(y^2 - xy)\,dx + x^2\,dy = 0$ Rpta: $x = K\,e^{x/y}$

145. $(x^3-y^3)\,dx + xy^2\,dy = 0$ Rpta: $y^3 + 3x^3\,\text{Ln}\,K x = 0$

146. $(x^3 - 3xy^2) + (y^3 - 3x^2y)\,dy = 0$ Rpta: $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = c$

147. $y(x+3y)\,dx + x^2\,dy = 0$ Rpta: $x^2y = c\,(2x+2y)$

148. $y(2x^3 - x^2y + y^3)\,dx - x(2x^3+y^3)\,dy = 0$ Rpta: $2x^2y\,\text{Ln}(cx) = 4x^3 - y^3$

149. $y(x^2+y^2)\,dx + x(3x^2-5y^2)\,dy = 0$, $y(2) = 1$ Rpta: $2y^5 - 2x^2y^3 + 3x = 0$

150. $\left(2\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$ Rpta: $\dfrac{x^2}{y} + arc.\text{tg}\, y/x = c$

151. $y(x^2y^2+2)\,dx + x(2-2x^2y^2)\,dy = 0$ Rpta: $x = cy^2e^{1/x^2y^2}$

152. $y(2xy+1)\,dx + x(1+2xy-x^3y^3)\,dy = 0$ Rpta: $y = ce^{-\frac{3xy+1}{3x^3y^3}}$

153. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-xy^2-x^3}{x+x^2y+y^3}$ Rpta: $x^2+y^2+2\ \text{arc.tg}\ y/x = K$

154. Demuéstrese que la ecuación diferencial

$x^{pq}(\alpha y dx + \beta x dy) + x^r y^s(\gamma y dx + \delta x dy) = 0$, donde p, q, r, s, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes conocidas, tienen un factor integrante de la forma $x^a\ y^b$ en que a y b son constantes adecuadas.

155. $(x^2y+2y^4)\,dx + (x^3+3xy^3)\,dy = 0$ Rpta: $5x^{1/2}y^{1/2} + 12x^{10}y^{15} = c$

156. Demuéstrese que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(y^2-x^2-1)}{x(y^2-x^2+1)}$ puede resolverse efectuando una transformación a coordenadas polares r y θ en la cual $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y hallar su solución.

Rpta: $x^2+cxy+y^2 = 0$

157. Si ϕ es un factor integrante de la ecuación diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, demostrar que ϕ satisface a la ecuación de derivados parciales.

$$M(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial y} - N\frac{\partial\phi}{\partial x} + \phi\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) = 0$$

158. Demuéstrese que si la ecuación diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ es tal que $\dfrac{1}{xM-yN}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right) = F(xy)$ es decir una función del producto, entonces

o $e^{\int F(u)du}$ es un factor integrante siendo $u = xy$.

159. $(y^2+xy+1)\,dx + (x^2+xy+1)\,dy = 0$ Rpta: $e^{xy}(x+y) = c$

160. $(x^3+xy^2+y)\,dx - x\,dy = 0$ Rpta: $x^2 - 2\ \text{arc.tg}\ y/x = c$

161. $(x-\sqrt{x^2+y^2})\,dx + (y-\sqrt{x^2+y^2})\,dy = 0$ Rpta: $\sqrt{x^2+y^2} = x+y+c$

162. $(x^3+y)\,dx + (x^2y-x)\,dy = 0$ Rpta: $x^3+xy^2-2y = cx$

163. $(x^2+y^2+y)\,dx + (x^2+y^2-x)\,dy = 0$ Rpta: $x+y-\text{arc.tg}\ y/x = c$

164. $(x-x^2-y^2)\,dx + (y+x^2+y^2)\,dy = 0$ Rpta: $\text{Ln}\,|x^2+y^2| + 2y - 2x = c$

165. $(x^2y+y^3-x)\,dx + (x^3+xy^2-y)\,dy = 0$ Rpta: $\text{Ln}\,(x^2+y^2) = 2xy + c$

166. $(xy^2 + x\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,2x)\,dx - 2y\,dy = 0$ Rpta: $x^2 - 2\text{Ln}\,(y^2+\text{sen}^2 x) = c$

167. $(5xy+4y^2+1)\,dx + (x^2+2xy)\,dy = 0$ Rpta: $4x^5y + 4x^4y^2 + x^4 = c$

168. $(3+y+2y^2\,\text{sen}^2 x)\,dx + (x+2xy-y\,\text{sen}\,2x)\,dy = 0$

Rpta: $y^2\,\text{sen}\,2x = c + 2x(3+y+y^2)$

169. $\cos\theta\,(1+2r\cos^2\theta)\,dr + r\,\text{sen}\,\theta\,(1-r\cos^2\theta)\,d\theta = 0$

Rpta: $r^2\cos^2\theta + r = c.\cos\theta$

170. $(r^2\,\text{sen}\,\theta - \text{tg}\,\theta)\,dr + r\sec\theta\,(\sec\theta + r^2\,\text{tg}\,\theta)\,d\theta = 0$

Rpta: $r^2\sec\theta + \text{tg}\,\theta = rc$

171. $(x^3+xy^2+y)\,dx + (y^3+x^2y+x)\,dy = 0$ Rpta: $(x^2+y^2)^2 = c - 4xy$

172. $(x^3+xy^2-y)\,dx + (y^3+x^2y+x)\,dy = 0$ Rpta: $2\ \text{arc.tg}\ y/x = c - x^2 - y^2$

173. $(y^2\cos x - y)\,dx + (x+y^2)\,dy = 0$ Rpta: $y^2 - x = y(c - \text{sen}\,x)$

174. $(x + x^3\,\text{sen}\,2y)\,dy - 2y\,dx = 0$ Rpta: $x^2(c+\cos 2y) = 2y$

175. $(2y\,\text{sen}\,x - \cos^3 x)\,dx + \cos x\,dy = 0$ Rpta: $y = (x+c)\cos^2 x$

176. $(2x+2xy^2)\,dx + (x^2y+2y+3y^3)\,dy = 0$ Rpta: $(x^2+y^2)\sqrt{1+y^2} = c$

177. Probar que si $\dfrac{Nx-My}{xM-yN} = R$, donde R depende solo de xy, entonces la ecuación diferencial Mdx + Ndy, tiene un factor integrante de la forma M (xy). Hallar una fórmula general para este factor integrante.

178. Hallar un factor integrante y resolver la ecuación diferencial $(2y^3 + 2x^2y - by)\,dx - (2x^3 + 2xy^2 - 2bx)\,dy = 0$

179. $(x + y)^2 (x\,dy - y\,dx) + [y^2 - 2x^2 (x + y)^2] (dx + dy) = 0$

180. Encontrar la solución general de la ecuación $(xy - x^2)\,dx + (xy - y^2)\,dy = 0$, aplicando un factor integrante de la forma $u = \varphi(y - x)$

Rpta: $x^2 - y^2 = c$

181. Resolver la ecuación diferencial $y(2xy + 1)\,dx + (x + 2x^2y - x^4y^3)\,dy = 0$, sabiendo que u es factor de la forma $u = \dfrac{1}{Mx - Ny}$, donde $Mx - Ny \neq 0$.

Rpta: $\dfrac{1}{x^2y^2} + \dfrac{1}{3x^3y^3} + \ln y = c$

182. Resolver la ecuación diferencial $\left(3x + \dfrac{6}{y}\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{3y}{x}\right)dy = 0$ encontando un factor integrante de la forma $u = \varphi(x - y)$.

Rpta: $x^3y + y^3 + 3x^2 = c$

2.8. Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = f(x) \quad ....(1)$$

donde a_1, a_2 y f son funciones solamente de x ó constantes.

Suponiendo que $a_1(x) \neq 0$, entonces, dividiendo a la ecuación (1) por $a_1(x)$ se tiene

$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{a_2(x)}{a_1(x)}y = \dfrac{f(x)}{a_1(x)}$, de donde se tiene:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x). \quad ....(2)$$

a la ecuación (2) llamaremos ecuación diferencial lineal de primer orden en y.

Si Q(x) = 0, la ecuación (2) toma la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

a la ecuación (3) llamaremos ecuación diferencial lineal homogénea y es una ecuación diferencial de variable separable y su solución es:

$$y = Ke^{-\int p(x)dx}$$

Si $Q(x) \neq 0$, la ecuación (2) es decir:

$\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$ llamaremos ecuación diferencial lineal no homogénea.

Como $Q(x) \neq 0$, la ecuación (2) no es exacta.
Luego hallaremos un factor de integración para su solución.

Si I(x) un factor integrante solo de x a la ecuación (2) lo expresaremos así:

$[\,p(x)\,y - Q(x)\,]\,dx + dy = 0$, al multiplicar por I(x).

$I(x)\,[\,p(x)\,y - Q(x)\,]\,dx + I(x)\,dy = 0$, es una ecuación diferencial exacta, por lo tanto:

$\dfrac{\partial\ I(x)(p(x)y - Q(x))}{\partial y} = \dfrac{\partial\ I(x)}{\partial x}$, efectuando:

$I(x)p(x) = \dfrac{dI(x)}{dx}$, de donde agrupando.

$\dfrac{dI(x)}{I(x)} = p(x)dx$, integrando con respecto a x.

$\displaystyle\int \frac{dI(x)}{I(x)} = \int p(x)dx \Rightarrow LnI(x) = \int p(x)dx$ de donde:

$I(x) = e^{\int p(x)dx}$, el factor de integración

ahora multiplicamos a la ecuación diferencial.

$$(p(x)y - Q(x))dx + dy = 0 \text{ por } I(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$e^{\int p(x)dx}[p(x)y - Q(x)]dx + e^{\int p(x)dx}dy = 0 \quad \text{agrupando}$$

$$e^{\int p(x)dx}p(x)ydx + e^{\int p(x)dx}dy = e^{\int p(x)dx}Q(x)dx$$

$$d(e^{\int p(x)dx}y) = e^{\int p(x)dx}Q(x)dx \text{ , integrando:}$$

$$e^{\int p(x)dx}y = \int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx + c \text{ , de donde:}$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx + c\right]$$

Que es la solución general de la ecuación (2)

a. **Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2x$

Solución

$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2x$, de donde p (x) = 2, Q (x) = $x^2 + 2x$

Como la solución general es: $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx + c\right]$

$$y = e^{-\int 2dx}\left[\int e^{\int 2dx}(x^2 + 2x)dx + c\right] \text{ efectuando.}$$

$$y = e^{-2x}\left[\int e^{2x}(x^2 + 2x)dx + c\right], \text{ integrando por partes.}$$

$$y = \frac{2x^2 + 2x - 1}{4} + ce^{-2x}$$

2. $xLnx.\frac{dy}{dx} - y = x^3(3Ln|x| - 1)$

Solución

A la ecuación diferencial escribiremos así: $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{xLnx}y = \frac{x^2(3Ln|x|-1)}{Lnx}$, ecuación lineal en y. Como la solución general de la ecuación es:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx + c\right] \text{ reemplazando}$$

$$y = e^{-\int -\frac{dx}{xLn|x|}}\left[\int e^{\int -\frac{dx}{xLn|x|}}\frac{x^2(3Ln|x|-1)}{Ln|x|}dx + c\right]$$

$$y = e^{Ln(Ln|x|)}\left(\int e^{-Ln(Ln|x|)}\frac{x^2(3Ln|x|-1)}{Ln|x|}dx + c\right)$$

$$y = Ln|x|\left(\int \frac{x^2(3Ln|x|-1)}{Ln^2|x|}dx + c\right)$$

$$y = Ln|x|\left(\int d(\frac{x^3}{Ln|x|}) + c\right) = Ln|x|(\frac{x^3}{Ln|x|} + c)$$

$$\therefore \quad y = x^3 + c\,.\,Ln\,|x|$$

3. $\frac{dy}{dx} + \phi'(x)y - \phi(x)\phi'(x) = 0$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos así: $\frac{dy}{dx} + \phi'(x)y = \phi(x)\phi'(x)$

Como la solución general es: $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx + c\right)$ reemplazando

$$y = e^{-\int \phi'(x)dx}\left(\int e^{\int \phi'(x)dx}\phi(x)\phi' dx + c\right)$$

$$y = e^{-\phi(x)}\int e^{\phi(x)}\phi(x)\phi'(x)dx + c$$ integrando por partes.

$$\begin{cases} u = \phi(x) \\ dv = e^{\phi(x)}\phi'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \phi'(x) \\ v = e^{\phi(x)} \end{cases}$$

$$y = e^{-\phi(x)}\left(\phi(x)e^{\phi(x)} - e^{\phi(x)} + c\right)$$

$$\therefore \quad y = \phi(x) - 1 + c.e^{-\phi(x)}$$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen} 2y}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen} 2y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = x \operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen} 2y$$

$\dfrac{dy}{dx} = -(\operatorname{sen} y)x = 2\operatorname{sen} 2y$, ecuación lineal en x.

$$x = e^{-\int -\operatorname{sen} y dy}\left(\int e^{\int -\operatorname{sen} y dy} 2\operatorname{sen} 2y dy + c\right)$$

$x = e^{-\cos y}\left(\int e^{\cos y} 2\operatorname{sen} 2y dy + c\right)$ de donde

$x = e^{-\cos y}\left(4\int e^{\cos y} \operatorname{sen} y . \cos y dy + c\right)$ integrando por partes.

$$x = e^{-\cos y}\left(-4\cos y e^{\cos y} + 4e^{\cos y} + c\right)$$

$$\therefore \quad x = 8\operatorname{sen}^2 y/2 + ce^{-\cos y}$$

5. $\dfrac{dy}{dx} - y c\operatorname{tg} x = 2x - x^2 c\operatorname{tg} x, \quad y(\pi/2) = \dfrac{\pi^2}{4} + 1$

Solución

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = e^{-\int -c\operatorname{tg} x dx}\left[\int e^{\int -c\operatorname{tg} x dx}(2x - x^2 c\operatorname{tg} x)dx + c\right]$$

$$y = e^{Ln \operatorname{sen} x}\left(\int e^{-Ln \operatorname{sen} x}(2x - x^2 c\operatorname{tg} x)dx + c\right)$$

$y = \operatorname{sen} x\left(\int \dfrac{2x - x^2 c\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}dx + c\right)$ integrando

$y = \operatorname{sen} x\,(x^2 \operatorname{cosec} x + c)$

$y = x^2 + c \operatorname{sen} x$, para $x = \pi/2$, $y = \pi^2/4 + 1$

$$\frac{\pi^2}{4} + 1 = \frac{\pi^2}{4} + c \Rightarrow c = 1$$

$$\therefore \quad y = x^2 + \operatorname{sen} x$$

6. $(1+x^2)Ln(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} - 2xy = Ln(1+x^2) - 2x \operatorname{arctg} x$

donde $y \to -\dfrac{\pi}{2}$ cuando $x \to -\infty$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos así:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{(x^2+1)Ln(x^2+1)}y = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x \operatorname{arctg}}{(1+x^2)Ln(1+x^2)}$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = e^{-\int \frac{-2x\,dx}{(x^2+1)Ln(x^2+1)}}\left[\int e^{\int \frac{-2x\,dx}{(x^2+1)Ln(x^2+1)}}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x \ \ \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)Ln(1+x^2)}\right)dx + c\right]$$

$$y = e^{Ln(Ln(1+x^2))}\left[\int e^{-LnLn(x^2+1)}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x \ \ \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)Ln(1+x^2)}\right)dx + c\right]$$

$$y = Ln(1+x^2)\left[\int \left[\frac{1}{(1+x^2)Ln(1+x^2)} - \frac{2x \ \ \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)Ln^2(1+x^2)}\right]dx + c\right]$$

$$y = Ln(1+x^2)\left[\int d\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{Ln(1+x^2)}\right) + c\right]$$

$$y = Ln(1+x^2)\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{Ln(1+x^2)} + c\right)$$

$y = \operatorname{arctg} x + cLn(1+x^2)$ de donde

$$c = \frac{y}{Ln(1+x^2)} - \frac{\operatorname{arctg} x}{Ln(1+x^2)} \quad \text{para } y \to \frac{-\pi}{2}, \quad x \to -\infty$$

$$c = \frac{-\pi/2}{\infty} - \frac{-\pi/2}{\infty} = 0 - 0 = 0 \Rightarrow c = 0$$

Luego la solución particular es: $y = \operatorname{arctg} x$

7. $\frac{dy}{dx} - 2xy = \cos x - 2x \operatorname{sen} x$, donde y es una función acotada, cuando $x \to \infty$

Solución

$\frac{dy}{dx} - 2xy = \cos x - 2x \operatorname{sen} x$, la solución general es:

$$y = e^{-\int -2x\,dx}\left[\int e^{\int -2x\,dx}(\cos x - 2x \operatorname{sen} x)dx + c\right]$$

$$y = e^{x^2}\left[\int e^{-x^2}(\cos x - 2x \operatorname{sen} x)dx + c\right]$$

$$y = e^{x^2}\left(\int d(e^{-x^2} \operatorname{sen} x) + c\right) = e^{x^2}(e^{-x^2} \operatorname{sen} x + ce^{x^2})$$

$y = \operatorname{sen} x + ce^{x^2}$, como sen x varia entre -1 y 1 además y es acotado

Cuando $x \to \infty$ y $c = 0$

$\therefore \quad y = \operatorname{sen} x$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x}$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos así:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = e^y - x$ de donde

$\frac{dx}{dy} + x = e^y$, ecuación diferencial lineal en x.

cuya solución general es:

$$x = e^{-\int dy}\left[\int e^{\int dy} e^y dy + c\right]$$

$$x = e^{-y}\left[\int e^{2y} dy + c\right] = e^{-y}\left(\frac{e^{2y}}{2} + c\right)$$

$$\therefore \quad x = \frac{e^y}{2} + ce^{-y}$$

b. Ejercicios Propuestos:

I. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $x\operatorname{tg}^2 y\,dy + x\,dy = (2x^2 + \operatorname{tg} y)\,dx$ Rpta: $\operatorname{tg} y = x(2\operatorname{sen} x + c)$

2. $\frac{dy}{dx} - e^x y = \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - e^x \cos 1/x$ Rpta: $y = \cos 1/x + ce^{e^x}$

3. $x \operatorname{sen} \theta\, d\theta + (x^3 - 2x^2 \cos\theta + \cos\theta)\,dx = 0$ Rpta: $\cos\theta = \frac{x}{2} + cxe^{-x^2}$

4. $x^2 dy + xy\,dx = 8x^2 \cos^2 x\,dx$ Rpta: $xy = 2x^2 + 2x \operatorname{sen} 2x + \cos 2x + c$

5. $(x^5 + 3y)\,dx - xdy = 0$ Rpta: $y = x^3(\frac{x^2}{2}+c)$

6. $dy = x^{-5}(4x^4 y + 3x^4 y^{-1} + 256y^7 + 768y^5 + 864y^3 + 432y + 81y^{-1})\,dx$

7. $\frac{dy}{dx} - y.c\,tg\,x = \frac{sen(2x)}{2}$ Rpta: $y = K\,sen\,x + sen^2 x$

8. $\cos y\,.\,dx = (x\,sen\,y + tg\,y)\,dy$ Rpta: $x = K \sec y - \sec y\,.\,Ln \cos y$

9. $(2x\frac{dy}{dx}+y)\sqrt{1+x} = 1+2x$ Rpta: $y = \frac{c}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+x}$

10. $x(1-x^2)\frac{dy}{dx} - y + ax^3 = 0$ Rpta: $y = ax + \frac{cx}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(y^2 - 1)\,dx = y(x+y)\,dy$ Rpta: $x = \sqrt{y^2-1}(Ln(y+\sqrt{y^2-1})+C) - y$

12. $(1+y^2)dx = (\sqrt{1+y^2}\,sen\,y - xy)dy$ Rpta: $x\sqrt{1+y^2} + \cos y = c$

13. $\frac{dy}{dx} + y\cos x = sen\,x \cos x$ Rpta: $y = c\,e^{-sen\,x} + sen\,x - 1$

14. $\frac{dy}{dx}(x\cos y + a\,sen\,2y) = 1$ Rpta: $x = c\,e^{sen\,y} - 2a(1 + sen\,y)$

15. $\frac{dy}{dx} + y = sen\,x$ Rpta: $y = ce^{-x} + \frac{1}{2}(sen\,x - \cos x)$

16. $\frac{dy}{dx} + xy = 2x$ Rpta: $y = ce^{-x^2/2} + 2$

17. $x^2\,dy - sen\,2x\,dx + 3xy\,dx = 0$ Rpta: $4x^3 y + 2x \cos 2x = c + sen\,2x$

18. $\frac{dy}{dx} = \frac{3+xy}{2x^2}$ Rpta: $y = c\sqrt{x} - \frac{1}{x}$

19. $x\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1+x} = 1 - x^2$ Rpta: $y = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + c(1+\frac{1}{x})$

20. $(x+y)^2(xdy - ydx) + [\,y^2 - 2x^2(x+y)^2\,]\,dx + dy) = 0$

Rpta: $(y - x^2 - xy)(x+y)^3 = k(y + 2x^2 + 2xy)$

21. $(x^2+1)\,dy = (x^3 + xy + x)\,dx$ Rpta: $y = x^2 + 1 + c\sqrt{x^2+1}$

22. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-xy}{1-x^2}$ Rpta: $y = x + c\sqrt{1-x^2}$

23. $x(\frac{dy}{dx} - y) = x - y$ Rpta: $xy = c\,e^x - x - 1$

24. $2xdy = (y - 3x^2\,Ln\,x)\,dx$ Rpta: $y = \frac{2x^2}{3} - x^2 Lnx + c\sqrt{x}$

25. $\frac{dy}{dx} + x\,sen\,x = y/x$ Rpta: $y = x \cos x + cx$

26. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y+(2x-1)e^x}{2x+1}$ Rpta: $y = e^x + c\,(2x+1)$

27. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{x-y}{x-2}$ Rpta: $(x-2)\,y = x\,(x+c)$

28. $\frac{dy-(x+1)ydx}{x^2+4x+2} = dx$ Rpta: $y = ce^{x+x^2/2} - x - 3$

29. $(x^2 + 2x - 1)y' - (x+1)\,y = x - 1$ Rpta: $y = c\sqrt{x^2+2x-1} + x$

Sug. para la integral $d(\frac{f}{g}) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$

30. $(x+1)\,dy - [\,2y + (x+1)^4\,]\,dx = 0$ Rpta: $y = c(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)^4$

31. $x\;Lnx.\frac{dy}{dx} - (1+Ln(x))y + \frac{\sqrt{x}}{2}(2+Lnx) = 0$ Rpta: $y = cxLnx + \sqrt{x}$

32. $y' - y = 2xe^{x+x^2}$ Rpta: $y = e^{x+x^2} + ce^x$

33. $xy' = y + x^2\,sen\,x$ Rpta: $y = -x\cos x + cx$

34. $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$ Rpta: $y = \frac{cx}{x-1} + x^2$

35. $y' \cos y + \text{sen } y = x + 1$ Rpta: $\text{sen } y = x + ce^{-x}$ sug. $z = \text{sen } y$

36. $y' + \text{sen } y + x \cos y + x = 0$ Rpta: $\text{tg } y/2 = ce^{-x} - x + 1$

sug: $\text{sen } 2y = 2 \text{ sen } y \cos y$, $\cos^2 y = \frac{1+\cos 2y}{2}$

37. $y' - \frac{n}{x+1} y = e^x (x+1)^n$ Rpta: $y = (x+1)^n (c + e^x)$

38. $(y^3 - y)dx + (xy^2 + x - y^2 + 1)dy = 0$ Rpta: $x(y^2 - 1) = y^2 + 1 + cy$

39. $x\frac{dy}{dx} + y(x c\text{tg } x + 1) = c\text{tg } x$ Rpta: $(xy - 1) \text{ sen } x = c$

40. $(x + \text{sen } y - 1)dy + \cos y \, dx = 0$ Rpta: $x(\sec y + \text{tg } y) = y + c$

41. $(e^y - 2xy)y' = y^2$ Rpta: $xy^2 = e^y + c$

42. $y - xy' = y' y^2 e^y$ Rpta: $x = ye^y + cy$

43. $x\frac{dy}{dx} - 3y = x^4$ Rpta: $y = x^4 + cx^3$

44. $y' + y \text{ ctg } x = 2x \text{ cosec } x$ Rpta: $y = x^2 \text{ cosec } x + c.\text{cosec } x$

45. $y' + y = \frac{1}{1+e^{2x}}$ Rpta: $y = e^{-x} \text{ arctg } e^x + ce^{-x}$

46. $y' + y = 2x e^{-x} + x^2$ Rpta: $y = x^2 e^{-x} + x^2 - 2x + 2 + ce^{-x}$

47. $(1 + x^2)dy + 2xy \, dx = \text{ctg } x \, dx$ Rpta: $y = \frac{Ln(\text{sen } x)}{1+x^2} + \frac{c}{1+x^2}$

48. $(x^5 + 3y)dx - xdy = 0$ Rpta: $2y = x^5 + cx^3$

49. $2(2xy + 4y - 3)dx + (x+2)^2 dy = 0$ Rpta: $y = \frac{2}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^4}$

50. $(2xy + x^2 + x^4)dx - (1 + x^2)dy = 0$ Rpta: $y = (1 + x^2)(c + x - \text{arc tg } x)$

51. $(y - \cos^2 x)dx + \cos x dy = 0$ Rpta: $y(\sec x + \text{tg } x) = c + x - \cos x$

52. $(y - x + xy \text{ ctg } x)dx + xdy = 0$ Rpta: $xy \text{ sen } x = c + \text{sen } x - x \cos x$

53. $2y(y^2 - x)dy = dx$ Rpta: $x = y^2 - 1 + ce^{-y^2}$

54. $(1 + xy)dx - (1 + x^2)dy = 0$ Rpta: $y = x + c(1 + x^2)^{1/2}$

55. $dx - (1 + 2x \text{ tg } y)dy = 0$ Rpta: $2x \cos^2 y = y + c + \text{sen } y \cos y$

56. $(1 + \cos x)y' = \text{sen } x(\text{sen } x + \text{sen } x.\cos x - y)$ Rpta: $y = (1 + \cos x)(c + x - \text{sen } x)$

57. $y'' + \frac{y'}{x-1} = x - 1$ Rpta: $y = \frac{1}{6}(x-1)^3 + K_1(x-1)^2 + K_2$

58. $(x^2 + 1)y' - (1 - x)^2 y = xe^{-x}$ Rpta: $y = \frac{ce^x - (2x+1)e^{-x}}{4(x^2+1)}$

59. $x \text{ sen } x\frac{dy}{dx} + (\text{sen } x + x\cos x)y = xe^x$ Rpta: $y = \frac{e^x(x-1)+c}{x \text{ sen } x}$

60. $x\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = (1 + \sqrt{1-x^2})e^x$ Rpta: $y = (\frac{1+\sqrt{1-e^x}}{x})(e^x + c)$

61. $(1 + \text{sen } x)\frac{dy}{dx} + (2\cos x)y = \text{tg } x$ Rpta: $y = \frac{\text{sen } x + Ln(1 - \text{sen } x) + c}{(1 + \text{sen } x)^2}$

62. $x(x+1)y' + y = x(x+1)^2 e^{-x^2}$ Rpta: $y = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x})(c - e^{-x^2})$

63. $y' - (\text{tg } x)y = e^{\text{sen } x}$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ Rpta: $y = \sec x. e^{\text{sen } x} + \text{cosec } x$

64. $y + 2xy = xe^{-x^2}$ Rpta: $y = \frac{x^2}{2}e^{-x^2} + ce^{-x^2}$

65. $\frac{dy}{dx} + my = e^{-mx}$ Rpta: $y = x e^{-mx} + c e^{-mx}$

66. $\frac{dy}{dx} + (\text{sen } x)y = Kx$ Rpta: $y = ce^{\cos x} + Ke^{\cos x}\int_0^x te^{-\cos t} dt$

67. $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}+xy=Kx$ Rpta: $y=K+c\sqrt{1+x^2}$

68. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2x}{x^2+1}y=x$ Rpta: $y=\dfrac{x^4+2x^2+c}{4(x^2+1)}$

69. $y'=\dfrac{y}{2y\ Lny+y-x}$ Rpta: $x=y\ \ Lny+\dfrac{c}{y}$

70. $x(x^3+1)y'+(2x^3-1)y=\dfrac{x^3-2}{x}$ Rpta: $y=\dfrac{cx}{x^3+1}+\dfrac{1}{x}$

71. $y'+x\,\text{sen}\,2y=xe^{-x^2}\cos^2 y$ Rpta: $\text{tg}\,y=(c+\dfrac{x^2}{2})e^{-x^2}$, $sug.\,z=\text{tg}\,y$

72. $xy'=x-y+\text{tg}\,x$ Rpta: $xy\cos x=c+\cos x+x\,\text{sen}\,x$

73. $(\text{sen}\,x\,.\,\text{sen}\,y+\text{tg}\,x)\,dx-\cos x\cos y\,dy=0$ Rpta: $\cos x\,.\,\text{sen}\,y=Ln\,(\text{cosec}\,x)$

74. $x\,\text{sen}\,x\,.\,y'+(\text{sen}\,x-x\cos x)\,y=\text{sen}\,x\,.\cos x-x$ Rpta: $y=\dfrac{K\,\text{sen}\,x}{x}+\cos x$

75. $(2x-1)y'-2y=\dfrac{1-4x}{x^2}$ Rpta: $y=c(2x-1)+\dfrac{1}{x}$

76. $y'+\text{sen}\,x\,.\,y=2x\,e^{\cos x}$ Rpta: $y=(x^2+c)\,e^{\cos x}$

77. $x^2\,dy+xy\,dx=8x^2\cos 2x\,.\,dx$ Rpta: $xy=2x^2+2x\,\text{sen}\,2x+\cos 2x+c$

78. $dy+2y\,dx=\text{sen}\,3x\,.\,dx$ Rpta: $y=\dfrac{1}{13}(2\,\text{sen}\,3x-3\cos 3x)+ce^{-2x}$

79. $dx-x\,dy=Ln\,y\,dy$ Rpta: $x+Lny=e^{y}\displaystyle\int\frac{e^{-y}}{y}\,dy$

80. $(\text{sen}\,x+\cos y)dx+\cos x\,dx-\text{sen}\,y\,dy=0$ Rpta: $\text{sen}\,x+\cos y=ce^{-x}$

81. $(x^2+x+1)\,yy'+(2x+1)\,y^2=2x-1$

Rpta: $y^2(x^2+x+1)^2=x^4+\dfrac{4}{3}x^3+2x^2-4x+n$

82. $\displaystyle\int\phi(\alpha x)\,d\alpha=n\phi(x)$ Rpta: $\phi(x)=c.e^{\frac{n-1}{n}}$

83. $(1+2x\,.\,\text{ctg}\,y)dy=dx$ Rpta: $x=\text{sen}^2 y\,(c-\text{ctg}\,y)$

84. $f(x)\,dy+2y\,f'(x)\,dx=f(x)\,f'(x)\,dx$ Rpta: $3y=f(x)+c\,.\,(f(x))^{-2}$

85. $f^2(y)\dfrac{dx}{dy}+3f(y)f'(y)x=f'(y)$ Rpta: $2x\,f^3(y)=f^2(y)+c$

86. $\cos x\,.\,y''+\sec x\,.\,y'+(\sec x.\text{tg}\,x+\cos x)\,y=2\sec^2 x\,.\,\text{tg}\,x$

Rpta: $y=\cos x+c.e^{-\text{tg}\,x}\int_0^x e^{\text{tg}(t)}\,dt+K$

87. $\cos x\,.\,dy+3y\,\text{sen}\,x.dx-2\cos^2 x.dx=0$ Rpta: $y\sec^3 x=2\,\text{tg}\,x+c$

88. $\cos x\dfrac{dy}{dx}+\text{sen}\,x=1-y$ Rpta: $y\,(\sec x+\text{tg}\,x)=x+c$

89. $y'\,\text{sen}\,x=y\cos x+\text{sen}^2 x$ Rpta: $y=(x+c)\,\text{sen}\,x$

90. $xyy'+y^2=\text{sen}\,x$ Rpta: $x^2y^2=2\,\text{sen}\,x-2x\cos x+c$ sug. $x=y^2$

91. $x\,(x^2+1)\,y'+2y=(x^2+1)^3$ Rpta: $x^2y=\dfrac{1}{4}(x^2+1)^3+c(x^2+1)$

92. $y'=1+3y\,\text{tg}\,x$ Rpta: $3y\cos^3 x=c+3\,\text{sen}\,x-\text{sen}^3 x$

93. $(x+a)\,y'=bx-ny$. a, b, n constante, $n\neq 0$, $n\neq -1$

Rpta: $n\,(n+1)\,y=b\,(nx-a)+c\,(x+a)^{-n}$

94. $(\cos 2y-\text{sen}\,x)\,dx-2\,\text{tg}\,x\,\text{sen}\,2y\,dy=0$ Rpta: $\text{sen}\,x\cos 2y-\dfrac{\text{sen}^2 x}{2}=c$

95. $(3x^2+1)\,y'-2xy=6x$ Rpta: $y=-3+k(x^2+1)$

96. $(x^2+1)y'+xy=(1-2x)\sqrt{x^2+1}$ Rpta: $y=\dfrac{x-x^2+c}{\sqrt{x^2+1}}$

97. $x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{\sqrt{2x+1}}=1+\sqrt{2x+1}$ Rpta: $y=\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)[2z-2\ln|z+1|+c]$

$$z = \sqrt{2x+1}$$

98. $\operatorname{sen} x \cos x \dfrac{dy}{dx} + y = \operatorname{tg}^2 x$ Rpta: $y = 1 + k \operatorname{ctg} x$

99. $x^2\, dy + (2xy - x + 1)\, dx = 0$ Rpta: $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{c}{x^2}$

100. $xy' + (1 + x)\, y = e^{-x}$ Rpta: $y = e^{-x}(1 + c/x)$

101. $y' + \dfrac{y}{1-x} = x^2 - x$ Rpta: $y = (1 - x)(c - x^2/2)$

102. $y' = \dfrac{2y}{1+x} + (1+x)^3$ Rpta: $y = (x+1)^2\left[x + \dfrac{x^2}{2} + c\right]$

103. $x\,dy = (2y + 3x^4 + x^2)\, dx$ Rpta: $y = x^2\left[\dfrac{3x^2}{2} + \ln x + c\right]$

104. $y' + 2xy + x = e^{-x^2}$ 105. $\dfrac{dy}{dx} + xy - x^2 + x^3(y-x)^2 = 1$

106. $\dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = e^{-x}(\operatorname{tg} x - 1)$ 107. $(5y - 2x^3 y^{3/2})dx + x^4 y^{1/2} dy = 0$

108. Supongamos que ϕ es una función con derivada continua en $0 \le x \le 1$ que satisface $\phi\,'(x) - 2\phi\,(x) \le 1$ y $\phi\,(0) = 1$ probar que $\phi\,(x) \le \dfrac{3}{2} e^{2x} - \dfrac{1}{2}$

109. $y'' + (\operatorname{tg} x) y' + \sec^2 x . y) = \cos x$ Rpta: $y = \cos x[\ln|\sec x| + c.\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k]$

110. $(ny + (x+1)^{n+1} e^x)dx - (x+1)dy = 0$ Rpta: $y = (x+1)^n e^x + c(x+1)^n$

111. $(x^2 + 2x + \operatorname{sen}(x^2 + y^2) + 2x\cos(x^2+y^2)dx + 2y\cos(x^2+y^2)dy = 0$

II. Hallar la solución particular de la ecuación diferencial con las condiciones dadas.

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x} y = \dfrac{\cos x}{x^2}$, $y(\pi) = 0$, $x > 0$ Rpta: $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

2. $xy' + y - e^x = 0$, $y(a) = b$ Rpta: $y = \dfrac{e^x + ab - e^a}{x}$

3. $y' - \dfrac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$, $y(0) = 0$ Rpta: $y = \dfrac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arc\,sen} x)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

4. $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$ Rpta: $y = \dfrac{x}{\cos x}$

5. $y' - (1 + \dfrac{3}{x})y = x + 2$, $y(1) = e - 1$ Rpta: $y = x^3 e^x - x$

6. $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^2 + x$, $y(1) = 1$ Rpta: $y = x^2 \operatorname{Ln} x + 2x^2 - x$

7. $y\dfrac{dy}{dx} - 2x = 3y^2 - 2$, $y(1) = 1$ Rpta: $x = 3y^2 \operatorname{Ln} y + 1$

8. $y\,dx - 4x\,dy = y^6\, dy$, $y(4) = 1$ Rpta: $2x = y^4(y^2 + 7)$

9. $y' - 2xy = \cos x - 2x \operatorname{sen} x$, y es una función acotada cuando $x \to \infty$

Rpta: $y = \operatorname{sen} x$

10. $2\sqrt{x}\, y' - y = -\operatorname{sen}\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}$, y es acotada cuando $x \to +\infty$

Rpta: $y = \cos\sqrt{x}$

11. $y' - y \operatorname{Ln} 2 = 2^{\operatorname{sen} x}(\cos x - 1) \operatorname{Ln} 2$, y es acotada cuando $x \to +\infty$

Rpta: $y = 2^{\operatorname{sen} x}$

12. $2x^2 y' - xy = 2x \cos x - 3 \operatorname{sen} x$, $y \to 0$, cuando $x \to +\infty$

Rpta: $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

13. $y' \operatorname{sen} x - y \cos x = -\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$, $y \to 0$, cuando $x \to \infty$

Rpta: $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

14. $y' - e^x y = \dfrac{1}{x^2} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} - e^x \cos\dfrac{1}{x}$, $y \to 2$, cuando $x \to -\infty$

Rpta: $y = e^{e^x} + \cos 1/x$

15. $y' - y \operatorname{Ln} x = -(1 + 2 \operatorname{Ln} x)x^{-x}$, $y \to 0$, cuando $x \to +\infty$

Rpta: $y = x^{-x}$

16. $L\dfrac{di}{dt}+Ri=E$, donde L, R, E son constantes, i (0) = 0

Rpta: $i=\dfrac{E}{R}(1-e^{-R^t/L})$

17. $\dfrac{di}{dt}+Ri=E.\operatorname{sen}\omega\ t$, cuando t = 0, i=0

Rpta: $i=EZ^{-2}(R.\operatorname{sen}\omega\ t-\omega\ L\cos\omega\ t+\omega\ Le^{-R^t/L})$

donde $Z^2=R^2+\omega^2L^2$

18. $(3x^4y-1)\,dx+x^5\,dy=0$, $y(1)=1$ Rpta: $x^4y=2x-1$

19. $(y'+y\operatorname{tg}x)\operatorname{sen}2x$, $y(0)=2$ Rpta: $y=4\cos x-2\cos^2 x$

20. $\dfrac{dx}{dt}+x=e^{2t}$, $x(0)=1$ Rpta: $y=\dfrac{e^{2t}}{3}+\dfrac{2e^{-t}}{3}$

2.9. Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli

Las Ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)y^n\ ;n\neq 1\ldots.(1)$$

Se conoce con el nombre de Ecuación Diferencial de Bernoulli.

La ecuación (1) no es una ecuación diferencial lineal.

Luego para resolver la ecuación (1), primero se transforma a una ecuación diferencial lineal, mediante el procedimiento siguiente:

1° A la ecuación (1) se multiplica por y^{-n}, es decir:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=Q(x)$$

2° A la ecuación diferencial del 1° paso se multiplica por (1 - n), es decir:

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)p(x)y^{1-n}=(1-n)Q(x)$$

3° Sea $z=y^{1-n}\Rightarrow\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$

4° Se reemplaza el 3° paso en el 2° paso, es decir:

$$\frac{dy}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)Q(x)$$

Que es una ecuación diferencial lineal en z de primer orden y la solución es conocida de acuerdo a 2.11.

a. **Ejemplos:** Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1. $2x\dfrac{dy}{dx}+2y=xy^3$

Solución

A la ecuación diferencial dada expresaremos así:

$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{y^3}{2}$; multiplicando por y^{-3}

$y^{-3}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y^{-2}=\dfrac{1}{2}$; multiplicando por (1 - n) es decir por -2.

$$-2y^{-3}\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y^{-2}=-1\ldots(1)$$

Sea $z=y^{-2}\Rightarrow\dfrac{dz}{dx}=-2y^{-3}\dfrac{dy}{dx}$; reemplazando en (1)

$\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{2}{x}z=-1$, ecuación diferencial lineal en z.

y la solución general es:

$$z = e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left[\int e^{\int -\frac{2}{x}dx}(-1)dx + c\right] \text{ efectuando}$$

$$z = e^{2Lnx}\left[-\int e^{-2Lnx}dx + c\right]$$

$$\therefore y^{-2} = x + c.x^2$$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2y + y^3}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x^2y + y^3}{x}$$

$\dfrac{dy}{dx} - xy = y^3x^{-1}$, multiplicando por x.

$x\dfrac{dy}{dx} - yx^2 = y^3$, multiplicando por (1 - n) osea por 2.

$$2x\frac{dy}{dx} - 2yx^2 = 2y^3 \ldots(1)$$

Sea $z = x^2 \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = 2x\dfrac{dx}{dy}$, reemplazando en (1)

$\dfrac{dz}{dy} - 2yz = 2y^3$, ecuación diferencial lineal en z.

y la solución general es:

$$z = e^{-\int -2ydy}\left[\int e^{\int -2ydy} 2y^3dy + c\right]$$

$z = e^{y^2}\left[\int e^{-y^2} 2y^3dy + c\right]$, integrando por partes.

$z = e^{y^2}\left[-y^2e^{-y^2} - e^{-y^2} + c\right]$ simplificando

$$\therefore (x^2 + y^2 + 1)e^{-y^2} = c$$

3. $y^2(y^6 - x^2)y' = 2x$

Solución

$$y^2(y^6 - x^2)y' = 2x \Rightarrow 2x\frac{dx}{dy} = y^2(y^6 - x^2)$$

$\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{y^2}{2}x = \dfrac{y^8}{2}x^{-1}$, multiplicando por x.

$x\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{y^2}{2}x^2 = \dfrac{y^8}{2}$, multiplicando por (1 - n) osea por 2.

$$2x\frac{dx}{dy} + y^2x^2 = y^8 \ldots(1)$$

Sea $z = x^2 \Rightarrow \dfrac{dz}{dy} = 2x\dfrac{dx}{dy}$ reemplazando en (1)

$\dfrac{dz}{dy} + y^2z = y^8$, ecuación diferencial lineal en z.

y la solución general es:

$z = e^{-\int y^2dy}\left[\int e^{\int y^2dy} y^8dy + c\right]$, integrando se tiene:

$z = e^{-y^3/3}\left[\int e^{y^3/3} y^8dy + c\right]$, integrando por partes.

$z = e^{-y^3/3}\left[9(\dfrac{y^6}{9} - \dfrac{2y^3}{3} + 2)e^{y^3/3} + c\right]$ simplificando

$$\therefore x^2 = y^6 - 6y^3 + 18 + ce^{-y^3/3}$$

4. $ydx + (x - \dfrac{x^3y}{2})dy = 0$

Solución

A la ecuación diferencial dada expresaremos así:

$$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=\left[\frac{x^3}{2}\right], \text{ multiplicando por } x^{-3}$$

$$x^{-3}\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x^{-2}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x^{-3}\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x^{-2}=1$$

Sea $z=x^{-2}\Rightarrow \dfrac{dz}{dy}=-2x^{-3}\dfrac{dx}{dy}$, reemplazando.

$$-\frac{dz}{dy}+\frac{2}{y}z=1\Rightarrow \frac{dz}{dy}-\frac{2}{y}z=-1 \text{ ecuación lineal en z.}$$

Luego la solución es:

$$z=e^{-\int -\frac{2}{y}dy}\left[\int e^{\int -\frac{2}{y}dy}(-1)dy+c\right]$$

$$z=e^{2Lny}\left[-\int e^{-2Lny}dy+c\right]$$

$$z=y^2\left[-\int\frac{dy}{y^2}+c\right]\Rightarrow \quad \therefore \quad x^{-2}=y+cy^2$$

5. $3xdy = y\,(1 + x \operatorname{sen} x - 3y^3 \operatorname{sen} x)\, dx$

Solución

$3xdy = y\,(1 + x \operatorname{sen} x - 3y^3 \operatorname{sen} x)\, dx$ expresaremos así:

$$3x\frac{dy}{dx}=y(1+x\operatorname{sen}x-3y^3\operatorname{sen}x) \text{ de donde}$$

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1+x\operatorname{sen}x}{3x}y=-\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)y^4, \text{ multiplicando por } y^{-4}$$

$$y^{-4}\frac{dy}{dx}-\frac{1+x\operatorname{sen}x}{3x}y^{-3}=-\frac{\operatorname{sen}x}{x};$$

Sea $z=y^{-3}\Rightarrow -\dfrac{dz}{3dx}=y^{-4}\dfrac{dy}{dx}$, reemplazando.

$$-\frac{dz}{3dx}-\frac{1+x\operatorname{sen}x}{3x}z=-\frac{\operatorname{sen}x}{x}\Rightarrow\frac{dz}{dx}+\frac{1+x\operatorname{sen}x}{x}z=3\frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

que es una ecuación diferencial lineal en z.

Cuya solución general es:

$$z=e^{-\int\frac{1+x\operatorname{sen}x}{x}dx}\left[\int e^{\int\frac{1+x\operatorname{sen}x}{x}dx}\;3\frac{\operatorname{sen}x}{x}\;dx+c\right]$$

$$z=e^{Lnx+\cos x}\left[\int e^{Lnx-\cos x}\;\frac{3\operatorname{sen}x}{x}dx+c\right]$$

$$z=\frac{e^{\cos x}}{x}\left[3\int e^{-\cos x}\operatorname{sen}x\,dx+c\right]$$

$$z=\frac{e^{\cos x}}{x}\left[3e^{-\cos x}+c\right]\Rightarrow\;\therefore\; y^{-3}=\frac{3}{x}+\frac{c.e^{\cos x}}{x}$$

6. $$3x\frac{dy}{dx}-2y=\frac{x^3}{y^2} \quad (1)\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos así:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{3x}y=x^2y^{-2}, \text{ multiplicando por } y^2$$

$$y^2\frac{dy}{dx}-\frac{2}{3x}y^3=x^2\ldots(1)$$

Sea $z=y^3\Rightarrow\dfrac{dz}{dx}=3y^2\dfrac{dy}{dx}$, reemplazando en (1)

$$\frac{dz}{3dx}-\frac{2}{3x}z=x^2\Rightarrow\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=3x^2, \text{ ecuación lineal en z.}$$

Cuya solución general es:

$$z = e^{-\int -\frac{2dx}{x}}\left[\int e^{\int -\frac{2dx}{x}} 3x^2 dx + c\right]$$

$$z = e^{2Lnx}\left[\int e^{-2Lnx} 3x^2 dx + c\right]$$ de donde

$y^3 = x^2(x + c) \Rightarrow y^3 = x^3 + cx^2$

7. $(2xy^3 - y)\,dx + 2x\,dy = 0$

Solución

A la ecuación diferencial escribiremos en la forma:

$$2x\frac{dy}{dx} + 2xy^3 - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = -y^3$$

multiplicando por y^{-3} se tiene:

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y^{-2} = -1, \quad \text{..............................(1)}$$

Sea $z = y^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$ reemplazando en (1)

$$-\frac{dz}{2dx} - \frac{1}{2x}z = -1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = 2 \text{ ecuación lineal}$$

Cuya solución general es:

$$z = e^{-\int\frac{dx}{x}}\left[\int e^{\int\frac{dx}{x}} 2dx + c\right] \Rightarrow z = e^{-Lnx}\left[\int e^{Lnx} 2dx + c\right]$$

$$z = \frac{1}{x}[x^2 + c] \Rightarrow y^{-2} = x + \frac{c}{x}$$

8. $2y = \frac{dy}{dx} + y^2 c\operatorname{tg} x = \operatorname{cosec} x$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos en la forma:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{c\operatorname{tg}x}{2}.y = \frac{\operatorname{cosec}x}{2}y^{-1}, \text{ multiplicando por y.}$$

$$y\frac{dy}{dx} + \frac{c\operatorname{tg}x}{2}.y^2 = \frac{\operatorname{cosec}x}{2}, \quad \text{.....................(1)}$$

Sea $z = y^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$, reemplazando en (1)

$$\frac{dz}{2dx} + \frac{c\operatorname{tg}x}{2}z = \frac{\operatorname{cosec}x}{2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} + c\operatorname{tg}x.z = \operatorname{cosec}x$$

que es una ecuación diferencial lineal en z.

Cuya solución general es:

$$z = e^{-\int c\operatorname{tg}x\,dx}\left[\int e^{\int c\operatorname{tg}x\,dx} \operatorname{cosec}\,x\,dx + c\right]$$

$$z = e^{-Ln(\operatorname{sen}x)}\left[\int e^{Ln(\operatorname{sen}x)} \operatorname{cosec}\,x\,dx + c\right]$$

$$z = \operatorname{cosec}\,x[x + c] \Rightarrow y^2 = x\operatorname{cosec}\,x + c.\operatorname{cosec}\,x.$$

b. **Ejercicios Propuestos**

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $(x^2 + y^2 + 1)\,dy + xy\,dx = 0$ Rpta: $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = K$

2. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 y^2$ Rpta: $\frac{1}{y^2} = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$

3. $(x^2+1)\,y' = xy + x^2y^2$ Rpta: $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\dfrac{1}{2}Ln|x+\sqrt{1+x^2}| - x\sqrt{1+x^2} + c\right)$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4\,\text{sen}^2 y}{x^5 + x\,\text{tg}\,y}$ Rpta: $x^4(k - \text{Ln}\,\text{tg}\,y) = \text{tg}\,y$

5. $(x^2+y^2+(y+2x)x^{-1})\,dy = (2(x^2+y^2)+(y+2x)x^{-2}y)\,dx$

Rpta: $(y-2x)^2 = -\dfrac{2y}{x} + 10\,\text{arctg}\,y/x$ sug. $y = u\,x$

6. $(xy^2)' = (xy)^3(x^2+1)$ Rpta: $y = \dfrac{45}{45c\sqrt{x} - 5x^5 - 9x^3}$

7. $dy - y\,\text{sen}\,x\,dx = y\,\text{Ln}(y\,e^{\cos x})\,dx$ Rpta: $y = -e^{Ke^x - \cos x}$

8. $(x+y^3) + 6xy^2y' = 0$ Rpta: $y^3 = -\dfrac{x}{3} + c.x^{-1/2}$

9. $(xy^2 + x\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,2x)\,dx - 2y\,dy = 0$ Rpta: $y^2 = \text{sen}^2 x + c.e^{x^2/2}$

10. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x-2}y = 5(x-2)\sqrt{y}$ Rpta: $y^{1/2} = c\,(x-2)^{-1/2} + (x-2)^2$

11. $3y^2\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y^3}{x+1} - 8(x+1) = 0,\ y(0) = 0$ Rpta: $y^3(x+1) = \dfrac{8}{3}[(x+1)^3 - 1]$

12. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y^3}{e^{2x}+y^2}$ Rpta: $y^2 = (c - 2\,\text{Ln}\,|y|)e^{2x}$ sug: $z = e^{2x} \Rightarrow dx = \dfrac{dz}{2z}$

13. $2\cos y\,dx - (x\,\text{sen}\,y - x^3)\,dy = 0$ Rpta: $\sec y = x^2(c + \text{tg}\,y)$

14. $dy + \dfrac{1}{x}y\,dx = 3x^2y^2dx$ Rpta: $xy\left(c - \dfrac{3x^2}{2}\right) = 1$

15. $dy + y\,dx = 2xy^2e^x\,dx$ Rpta: $1 = y\,e^x(c - x^2)$

16. $3\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3}{x}y = 2x^4y^4$ Rpta: $x^{-3}y^{-3} + x^2 = c$

17. $x^{-1}\,dx = (x\,\text{sen}\,y - 1)\,dy$ Rpta: $\dfrac{1}{x} = ce^y + \dfrac{1}{2}(\text{sen}\,y + \cos y)$

18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{x^3+y+1}$ Rpta: $x^3 = c\,.\,e^y - y - 2$

19. $8xy' - y = -\dfrac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$ Rpta: $y^4 = c\sqrt{x} + \sqrt{x+1}$

20. $2\,\text{sen}\,x.\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = y^3(x\cos x - \text{sen}\,x)$ Rpta: $\dfrac{1}{y^2} = x + K.\text{sen}\,x$

21. $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{Lnx} = \dfrac{x(x+Lnx)}{y^2 Lnx}$

Rpta: $y = \left[3x + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^2-6x}{Lnx}\right) - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^2-12x}{Lnx^2}\right) + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3x^2 = 72x + c}{(Lnx)^3}\right)\right]^{1/3}$

22. $(x-1)\dfrac{dy}{dx} - 2y = \sqrt{(x^2-1)y}$

Rpta: $y = [(1-x)(c + \dfrac{1}{2}Ln(x + \sqrt{x^2-1}) - \sqrt{x^2-1}]^2$

23. $dx + x.c\,\text{tg}\,y.dy = \dfrac{x\,\text{sen}\,y\cos y}{x^2\,\text{sen}^2 y + 1}dy$

Rpta: $x^2\,\text{sen}^2 y + 2\,\text{Ln}\,(x\,\text{sen}\,y) = \text{sen}^2 y + c$

24. $dx + \left(\dfrac{2}{y}\right)x\,dy = 2x^2y^2dy$ Rpta: $x^{-1}y^{-2} = c - 2y$

25. $dx - 2xy\,dy = 6x^3y^2e^{-2y^2}dy$ Rpta: $x^{-2}e^{2y^2} = c - 4y^3$

26. $(12\,e^{2x}y^2 - y)\,dx = dy,\ y(0) = 1$ Rpta: $y^{-1}e^{-x} = 13 - 12\,e^x$

27. $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2 Ln\,x$ Rpta: $cxy + y\,(\text{Ln}\,x + 1) = 1$

28. $2xy\dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$ Rpta: $y^2 = x\;Ln\!\left(\dfrac{k}{x}\right)$

29. $ye^y = (y^3 + 2x\,e^y)y'$ Rpta: $x = y^2(c - e^{-y})$

30. $xy^3\,dx = (x^2y + 2)\,dy$ — Rpta: $x^2 = 1 - \dfrac{2}{y} + c.e^{-2/y}$

31. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^3y}{x^4 + y^2}$ — Rpta: $x^4 = y^2 + cy$

32. $x^3\,dy + 3x^2\,dx = 2\cos y\,dy$ — Rpta: $x^3 = \operatorname{sen} y + \cos y + c.e^{-y}$

33. $x^3\,dx - (x^4 + y^3)\,dy = 0$ — Rpta: $x^3 = \operatorname{sen} y + \cos y + c.e^{-y}$

34. $yy' + y^2 = \cos x,$ — Rpta: $y^2 = c.e^{-2x} + \dfrac{2}{5}\operatorname{sen} x + \dfrac{4}{5}\cos x$

35. $y' = 5x^2y^5 + \dfrac{y}{2x}$ — Rpta: $y^{-4} = \dfrac{c}{x^2} - 4x^3$

36. $\cos x\dfrac{dy}{dx} - y\operatorname{sen} x + y^2 = 0$ — Rpta: $\dfrac{1}{y} = \operatorname{sen} x + K.\cos x$

37. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y}$ — Rpta: $y\ e^{x^2/2y^2} = c$

38. $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(2x + 3y^2)}{x^2}$ — Rpta: $x^2 = (c - 3x)\,y^2$

39. $\cos x.\dfrac{dy}{dx} = y\operatorname{sen} x + y^2\ \operatorname{tg} x$ — Rpta: $y = \dfrac{2\cos x}{K.\cos^2 x - 1}$

40. $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2y(y^2 - x^2)$ — Rpta: $x^2 = (1 + c.e^{x^4})y^2$

41. $(4 - x^2 + y^2)\,dx + 4y\,dy = 0,\ y(2) = 1$ — Rpta: $y^2 = (x - 2)^2 + e^{1-x/2}$

42. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$ — Rpta: $x^2 + y^2 - a^2 = cy$

43. $3y' + \dfrac{x^2 + a^2}{x(x^2 - a^2)}\,y = \dfrac{x(3x^2 - a^2)}{x^2 - a^2}.\dfrac{1}{y^2}$ — Rpta: $y^3 = \dfrac{cx}{x^2 - a^2} + x^2$

44. $y\,dx = (y^3 - x)\,dy$ — Rpta: $4xy = y^4 + c$

45. $(x^2 - 1)\,dy - y\,(2x - 3y)\,dx = 0$ — Rpta: $x^2 - 1 = y\,(3x + c)$

46. $y\,dx + (x^2y^4 - 3x)\,dy = 0$ — Rpta: $7y^3 = x\,(y^7 + c)$

47. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{3x} + \dfrac{x^2 + 2}{3}y^4 = 0$ — Rpta: $y^{-3} = \dfrac{x^3}{5} + \dfrac{2x}{3} + 4x^2$

48. $x^2\dfrac{dy}{dx} - xy + y^3e^x = 0$ — Rpta: $x^2 = y^2\,(2\,e^x + c)$

49. $xy^2\,y' + y^3 = x\cos x$

Rpta: $y^3 = 3\operatorname{sen} x + \dfrac{9\cos x}{x} - \dfrac{18\operatorname{sen} x}{x^2} - \dfrac{18\cos x}{x^3} + \dfrac{c}{x^4}$

50. $6y^2\,dx - x\,(ax^3 + y)\,dy = 0$ — Rpta: $(2x^3 - y)^2 = cy\,x^6$

51. $2x^3\,y' = y\,(y^2 + 3x^2)$ — Rpta: $y^2\,(c - x)x^3$

52. $2y\,dx + x(x^2\operatorname{Ln} y - 1)\,dy = 0$ — Rpta: $y\,(1 + x^2 - x^2\operatorname{Ln} y) = cx^2$

53. $2xy\,y' = y^2 - 2x^3,\ y(1) = 2$ — Rpta: $y^2 = x\,(5 - x^2)$

54. $(y^4 - 2xy)\,dx + 3x^2\,dy = 0,\ y(2) = 1$ — Rpta: $x^2 = y^3\,(x + 2)$

55. $(2y^3 - x^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0,\ y(1) = 1$ — Rpta: $5x^2y^3 = x^5 + 4$

56. $(x^2 + 6y^2)\,dx - 4xy\,dy = 0,\ y(1) = 1$ — Rpta: $2y^2 = x^2\,(3x - 1)$

57. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2\operatorname{sen} x - y\cos^2 x}{\operatorname{sen} x.\cos x}$ — Rpta: $y = (\operatorname{sen} x.\ \operatorname{Ln}|\operatorname{cosec} 2x + \operatorname{ctg} 2x| + \operatorname{sen} x)^{-1}$

58. $(x^2 + 1)\sqrt{y}\,y' = xe^{3x/2} + (1 - x)^2\,y\sqrt{y}$ — Rpta: $y = e^x\left(\dfrac{1}{2} + c(x^2 + 1)^{-3/2}\right)^{2/3}$

59. $y' - 4t = 2e^ty^{1/2},\ y(0) = 2.$ — Rpta: $y = \left(\sqrt{2}e^{2x} + e^{2x} - e^x\right)^2$

60. $y' - y = -y^2 (x^2 + x + 1),\ y(0) = 1$ Rpta: $y = \dfrac{1}{x^2 - x + 2 - e^{-x}}$

61. $xy' - 2y = 4x^3 y^{1/2},\ y(1) = 0$ Rpta: $y = (x^3 - x)^2$

62. $xy' + y = x^2 y^2 \text{Ln}\, x,\ y(1) = 1/2$ Rpta: $y = \dfrac{1}{x^2 + x - x^2 \ln x}$

63. $y' = \dfrac{y\psi'(x) - y^2}{\psi(x)}$ donde $\psi(x)$ es una función dada, Rpta: $y = \dfrac{\psi(x)}{x + c}$

64. $y^{n-1}(ay' + y) = x$ Rpta: $ny^n = ce^{-\frac{nx}{a}} + nx - a$

65. $xdx = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3\right)dy$ Rpta: $x^2 = y^2 (c - y^2)$

66. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$ Rpta: $y = \dfrac{1}{(1+x)[c + Ln|1+x|]}$

67. $xdy - 2ydx = \dfrac{x^8 y^{-2}}{3}[3(yx^{-2})^2 + 2yx^{-2}]dx$

Rpta: $6y x^{-2} - 4\, \text{Ln}\, |3y x^{-2} + 2| = 3x^2 + c$

68. $y - y' \cos x = y^2 \cos x\, (1 - \text{sen}\, x)$ Rpta: $y = \dfrac{\text{tg}\, x + \sec x}{c + \text{sen}\, x}$

69. $yy' + y^2\, \text{tg} x = \cos^2 x$ Rpta: $y^2 = (2x + c) \cos^2 x$

70. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$ Rpta: $y = \left(\dfrac{c + Ln|\cos x|}{x} + \text{tg}\, x\right)^2$

71. $2xyy' + (1+x)y^2 = e^x,\ \ y(1) = \sqrt{e}$ Rpta: $y = \left(\dfrac{e^x + e^{2-x}}{2}\right)^{1/2}$

72. $3\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x+1} = \dfrac{x}{y^2}$ Rpta: $12\,(x + 1)^2 y^3 = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + c$

73. $\dfrac{dy}{dx} - xy = y^{1/2} x e^{x^2}$ Rpta: $3y^{1/2} = e^{x^2} + ce^{x^2/4}$

74. $y^3 \dfrac{dy}{dx} + xy^4 = xe^{-x^2}$ Rpta: $e^{2x^2} y^4 = 2e^{x^2} + c$

75. $(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = x(1 - x^2)y^{1/2},\ y(0) = 1$ Rpta: $3y^{1/2} + 1 - x^2 = 4\,(1 - x^2)^{1/4}$

76. $2ydx = (x^2 y^4 + x)\, dy,\ y(1) = 1$ Rpta: $10x = (9 + xy^4)\, y^{1/2}$

77. $xy' + y = y^2 \text{Ln} x$ Rpta: $y\,(1 + \text{Ln}\, x + cx) = 1$

78. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$ Rpta: $y = \dfrac{x^4}{2} Ln^2|xK|$

79. $(x+1)dy = y[y(x+1)Ln(x+1) - 1]dx,\ \ y = \dfrac{1}{e},\ \ x = \dfrac{1}{e}$

Rpta: $2y^{-1}(x - 1)^{-1} = 3 - [\text{Ln}\,(x + 1)]^2$

80. $\dfrac{dy}{dx} - y\, \text{tg}\, x + y^2 \cos x = 0$ Rpta: $y\,(x + c) = \sec x$

81. $ydy - \dfrac{ay^2}{x^2}dx = \dfrac{bdx}{x^2}$ Rpta: $y^2 = c.e^{-2a/x} - \dfrac{b}{a}$

82. $xdy = y\,(xy - y)\, dx$ Rpta: $x\, e^{1/xy} = c$

83. $2x^2 \dfrac{dy}{dx} + y = 4y^3$ Rpta: $y^2 = \dfrac{e^{1/x}}{c + 4e^{1/x}}$

84. $(e^y - 2xy)\, y' = y^2$ Rpta: $xy^2 = e^y + c$

85. $xy' + y = x^4 y^3$ Rpta: $\dfrac{1}{y^2} = -x^4 + cx^2$

86. $y - xy' = y' y^2 e^y$ Rpta: $x = y\, e^y + cy$

87. $xy^2 y' + y^3 = x \cos x$ Rpta: $y^3 = 3\, \text{sen}\, x + \dfrac{9 \cos x}{x} - \dfrac{18\, \text{sen}\, x}{x^2} - \dfrac{18 \cos x}{x^3} + cx^{-3}$

88. $dy + (4y - 8y^{-3})\, xdx = 0$ Rpta: $y = [2 + c.e^{-8x^2}]^{1/4}$

89. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{y^3},\ \ y(1) = 2$ Rpta: $x^2 y^4 = x^4 + 15$

90. $ydx = (3x + y^3 - y^2)\, dy;\ y(1) = -1$ Rpta: $x = y^2\,[1 + y\, \text{Ln}\,(-y)]$

91. $\dfrac{dy}{dx} = 5x^2 y^5 + \dfrac{y}{2x}$ Rpta: $u = \dfrac{c}{x^2} - 4x^3,\ \ y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{u}}$

92. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2 y + y^3}$ Rpta: $(x^2 + y^2 + 1)e^{-y^2} = c$

93. $3xy' + y + x^2 y^4 = 0$ Rpta: $y^{-3} = x^2 + cx$

94. $(3 \operatorname{sen} y - 5x)\,dx + 2x^2 \operatorname{ctg} y\,dy = 0$ Rpta: $x^3(\operatorname{sen} y - x)^2 = c \cdot \operatorname{sen}^2 y$

95. $y' \operatorname{tg} x . \operatorname{sen} 2y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y$, Rpta: $(\operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 y)\operatorname{sen} x = c$

96. $\cos y . \operatorname{sen} 2x\,dx + (\cos^2 y - \cos^2 x)\,dy = 0$

Rpta: $\cos^2 x\,(1 + \operatorname{sen} y) = \cos y\,(y + c - \cos y)$

97. $y\,(x \operatorname{tg} x + \operatorname{Ln} y)\,dx + \operatorname{tg} x\,dy = 0$ Rpta: $\operatorname{sen} x . \operatorname{Ln} y = x \cos x - \operatorname{sen} x + c$

98. $yy' + y^2 \operatorname{tg} x = \cos^2 x$ Rpta: $y^2 = (2x + c)\cos^2 x$

99. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y^2 c \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x \cos x}{2y}$ Rpta: $y^2 + \operatorname{sen} x = c . \operatorname{sen}^3 x$

100. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{t+1}{2t}x = \dfrac{t+1}{xt}$ Rpta: $x^2 = \dfrac{4 + e^{-t}c}{2}$

101. $ydx + (xy^2 + x - y)dy = 0$ Rpta: $x = \dfrac{1 + c.e^{y^2/2}}{2}$

102. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x+1)Lnx - x(3x+4)y^3}{(x^3 + 2x^2 - 1)y^2}$

103. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{6} y' + y = (1 + \cos x)y^{2/3}$

104. $(x^2 + x + 1)yy' + (2x+1)y^2 = 2x - 1$

105. $2(1 - x^2)y' - (1 - x^2)y = xy^3 e^{-x}$

106. $[\,y \cos x - y^3 (x \cos x - \operatorname{sen} x)\,]\,dx + 2 \operatorname{sen} x\,dy = 0$

107. $xy' - 3y = 2x$, $y(1) = 0$

108. $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{4}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{arctg} x y^{1/2}$ Rpta. $\sqrt{y} = \sqrt{1+x^2}\,[\operatorname{arctg}^2 x + c]$

109. $y^3 \sec^2 x\,dx - (1 - 2y^2 \operatorname{tg} x)\,dy = 0$ Rpta: $y^2 \operatorname{tg} x = \operatorname{Ln} |cy|$

110. $x^3 y\,dx + (3x^4 - y^3)\,dy = 0$ Rpta: $15x^4 y^{12} = 4y^{15} + c$

111. $ydx = x\,(1 + xy^4)\,dy$ Rpta: $y\,(5 + xy^4) = cx$

112. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg} y . c \operatorname{tg} x - \sec y . \cos x$ Rpta: $\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x . \operatorname{Ln}(c \operatorname{sen} x) = 0$

113. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{1 - 2xy^2}$, $y(0) = 1$ Rpta: $xy^2 - \operatorname{Ln}|y| = 0$

114. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^K y^n$ Rpta: $(n + K - 1)\,y^{1-n} = (1 - n)x^K + c.x^{1-n}$, $n \neq 1$, $K + n \neq 1$

$x^K = K \operatorname{Ln}\left|\dfrac{cy}{x}\right|$, $n = 1, K \neq 0$; $y = cx^2$, $n = 1$, $K = 0$,

$y^{1-n} = (1 - n)\,x^{1-n} \operatorname{Ln}|cx|$, $n \neq 1$, $K + n = 1$

115. $(x^3 + \cos^2 x + 2x^2y^2 + \operatorname{sen}^2 x)\,dx + 2x^3 y\,dy = 0$ Rpta. $x^2 y^2 = -\dfrac{x^3}{3} - \ln x + c$

2.10. Ecuación Diferencial de RICCATI.

Consideremos la ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x) \ldots (1)$$

donde P (x) , Q(x) y R(x) son funciones sólo de x.

A la ecuación (1) se conoce con el nombre de ecuaciones diferenciales de "RICCATI". Estas ecuaciones diferenciales no se puede resolver por métodos hasta este momento estudiados, pero sin embargo si se conoce una solución particular, se puede hallar la solución de la ecuación diferencial suponiendo que $y = \psi(x)$ sea una solución particular entonces se puede hallar la solución de la ecuación diferencial, haciendo $y = \psi(x) + z$, donde z es una función incógnita, que se va ha determinar con la ayuda de la ecuación diferencial.

Es decir: $y = \psi(x) + z \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \psi'(x) + \dfrac{dz}{dx}$, reemplazando en la ecuación (1) se tiene: $\psi'(x) + \dfrac{dz}{dx} = P(x)(\psi(x) + z) + Q(x)(\psi(x) + z)^2 + R(x) \ldots (2)$

Agrupando los términos de la ecuación (2)

$$\frac{dz}{dx} - P(x) + 2Q(x)\psi(x))z - Q(x)z^2 + (\psi'(x) -$$

$$P(x)\psi(x) - Q(x)\psi^2(x) - R(x)) = 0\ldots.(3)$$

Como y = ψ (x) es una solución de la ecuación diferencial de "RICCATI" entonces se tiene:

$$\psi'(x) - P(x)\psi(x) - Q(x)\psi^2(x) - R(x) = 0\ldots.(2)$$

de las ecuaciones (4) y (3) se tiene:

$$\frac{dz}{dx} - (P(x) + 2Q(x)\psi(x))z = Q(x)z^2\ldots.(5)$$

Luego la ecuación (5) es una ecuación diferencial de Bernoulli y la solución de estas ecuaciones ha sido estudiado en (2.12).

a. **Ejemplos:** Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}y^2 - 1$, donde una solución es y = ψ (x) = x

<u>**Solución**</u>

Sea y = ψ (x) + z = x + z, la solución de la ecuación diferencial dada, donde z es una función por determinarse, entonces $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dz}{dx}$

reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$1 + \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}(x+z) + \frac{1}{x^2}(x+z)^2 - 1 \quad \text{simplificando}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{3}{x}z = \frac{1}{x^2}z^2, \text{ ecuación diferencial de Bernoulli}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{3}{x}z = \frac{1}{x^2}z^2, \text{ multiplicando por } z^{-2}$$

$$z^{-2}\frac{dz}{dx} - \frac{3}{x}z^{-1} = \frac{1}{x^2}, \text{ multiplicando por (1 - n) o sea por -1}$$

$$-z^{-2}\frac{dz}{dx} + \frac{3}{x}z^{-1} = -\frac{1}{x^2}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Sea $\omega = z^{-1} \Rightarrow \frac{d\omega}{dx} = -z^{-2}\frac{dz}{dx}\ldots\ldots(2)$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\frac{d\omega}{dx} + \frac{3}{x}z = -\frac{1}{x^2}, \text{ ecuación lineal en } \omega.$$

y la solución general es:

$$\omega = e^{-\int\frac{3}{x}dx}\left[\int e^{\int\frac{3}{x}dx}\left(\frac{-dx}{x^2}\right) + c\right], \text{ calculando la integral}$$

$$\omega = e^{-3Lnx}\left[-\int e^{3Lnx}\frac{dx}{x^2} + c\right] = \frac{1}{x^3}\left(-\frac{x^2}{2} + c\right)$$

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{2x} + \frac{c}{x^3} = \frac{2c - x^2}{2x^3} \Rightarrow z = \frac{2x^3}{2c - x^2}$$

Luego la solución general es y = x + z

$$\therefore \quad y = \frac{2cx + x^3}{2c - x^2}$$

2. $\frac{dy}{dx} = x + (\frac{1}{x} - x^2)y + y^2$, donde una solución es y = ψ (x) = x^2

<u>**Solución**</u>

Sea y = x^2 + z, la solución de la ecuación diferencial dada, donde z es una función por determinarse, entonces $\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{dz}{dx}$ reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$2x + \frac{dz}{dx} = x + (\frac{1}{x} - x^2)(x^2 + z) + (x^2 + z)^2 \quad \text{simplificando}$$

$$\frac{dz}{dx} - (\frac{1}{x} + x^2)z = z^2 \quad \text{ecuación de Bernoulli}$$

multiplicando a la ecuación diferencial por z^{-2}

$$z^{-2}\frac{dz}{dx} - (\frac{1}{x} + x^2)z^{-1} = 1; \text{ de donde } \omega = z^{-1} \text{ se tiene:}$$

$$\frac{d\omega}{dx} = z^{-2}\frac{dz}{dx}, \quad \text{reemplazando obtenemos.}$$

$$-\frac{d\omega}{dx} - (\frac{1}{x} + x^2)\omega = 1 \Rightarrow \frac{d\omega}{dx} + (\frac{1}{x} + x^2)\omega = -1$$

es una ecuación lineal en ω cuya solución es:

$$\omega = e^{-\int -(\frac{1}{x}+x^2)dx}\left[\int e^{\int(\frac{1}{x}+x^2)dx}(-dx) + c\right]$$

$$z^{-1} = e^{Lnx - x^{3/3}}\left[-\int e^{Lnx + x^{3/3}}dx) + c\right]$$

$$z^{-1} = xe^{-x^{3/3}}\left[-\int e^{x^{3/3}}xdx) + c\right]$$

b. Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{1}{x}y + 1 - \frac{1}{4x^2}$, una solución es φ (x) $\frac{1}{2x} + \operatorname{tg} x$

Rpta: $y = \frac{1}{2x} + \frac{K \operatorname{sen} x + \cos x}{K \cos x - \operatorname{sen} x}$

2. $x^3 y' = x^2 y + y^2 - x^2$, una solución es φ (x) = x Rpta: $y = \frac{2cxe^{2/x} + x}{2ce^{2/x} - 1}$

3. $x(x-1)\frac{dy}{dx} - (2x+1)y + y^2 + 2x = 0$, una solución es φ (x) = x

Rpta: $y = \frac{x^2 + c}{x + c}$

4. $y' - xy^2 + (2x - 1)y = x - 1$, una solución es φ (x) = 1

Rpta: $y = 1 + \frac{1}{1 - x + ce^{-x}}$

5. $y' - \operatorname{sen}^2 x . y^2 + \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} y + \cos^2 x = 0$, una solución es φ (x) = $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Rpta: $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}(1 + (c.e^{-\operatorname{sen}^2 x} - 1/2)^{-1})$

6. $y' + y^2 - (1 + 2e^x)y + e^{2x} = 0$, una solución es $y = e^x$.

7. $y' + xy^2 - 2x^2 y + x^3 = x + 1$, una solución es φ (x) = x - 1

8. $\frac{dy}{dx} = -8xy^2 + 4x(4x+1)y - (8x^3 + 4x^2 - 1)$ una solución es φ (x) = x

Rpta: $y = [2 + ce^{-2x^2}]^{-1} + x$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$, una solución es φ (x) = x Rpta: $c.e^{\frac{2}{5}x^5} = \frac{y - x}{y + x}$

10. $\frac{dy}{dx} + y^2 \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$, una solución es $y = \frac{1}{\cos x}$

Rpta: $y = \sec x + \frac{3\cos^2 x}{c - \cos^3 x}$

11. $\frac{dy}{dx} = 3y + y^2 - 4$, una solución es φ (x) = 1 Rpta: $y = \frac{c + 4e^{5x}}{c - e^{5x}}$

12. $y' = x + (1 - 2x)y - (1 - x)y^2$ una solución es φ (x) = 1

Rpta: $y = 1 + \dfrac{1}{x + ce^{x}}$

13. $\dfrac{dy}{dx} = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x$, una solución es $\varphi(x) = 1$

Rpta: $y = (x - 2 + c\,e^{-x})^{-1} + 1$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\cos^2 x - \text{sen}^2 x + y^2}{2\cos x}$, una solución es $\varphi(x) = \text{sen}\, x$

Rpta: $y = \text{sen}\, x + (K\cos x - \dfrac{1}{2}\text{sen}\, x)^{-1}$

15. $y' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} + y^2$, una solución es $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ Rpta: $y = x^{-1} + 2x(x^2 + 2c)^{-1}$

16. $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$ una solución es $\varphi(x) = x$ Rpta: $y = x + (c - x)^{-1}$

17. $\dfrac{dy}{dx} = -y^2 + xy + 1$ una solución es $\varphi(x) = x$

18. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} - ye^{x} + e^{-x}y^2$, una solución es $y = e^x$

Rpta: $y = e^x - [\exp.(2x - e^x)]/[c + \exp(x - e^x)]$

2.11. Ecuaciones Diferenciales de Lagrange y Clairouts

a. Las ecuaciones diferenciales de Lagrange son de la siguiente forma:

$$y = x\,f(y') + g(y') \quad ....(1)$$

Para resolver la ecuación diferencial de Lagrange se transforma en otra ecuación diferencial lineal en x como función de P, haciendo $\dfrac{dy}{dx} = P$ de donde dy = P dx

Luego se sustituye $\dfrac{dy}{dx} = P$ en la ecuación; (1)

$$y = x\,f(P) + g(P) \quad ....(2)$$

diferenciando la ecuación (2) se tiene:

$$dy = f(P)\,dx + x\,f'(P)dp + g'(P)\,dp \quad ....(3)$$

reemplazando en la ecuación (3), dy = P dx se tiene:

$$P\,dx = f(P)\,dx + x\,f'(P)\,dp + g'(P)\,dp \quad .....(4)$$

La ecuación (4) se puede expresar en la forma:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(P)}{f(P) - P}x = -\frac{g'(P)}{f(P) - P}$$

Que es una ecuación diferencial lineal en x, cuya solución general es $x = \varphi(P,c)$ donde P ds un parámetro y la solución general de la ecuación (1) se dá en forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = \varphi(P,c) \\ y = \varphi(P,c)f(P) + g(P) \end{cases}, \; P \text{ es un parámetro.}$$

b. Las ecuaciones diferenciales de Clairouts son de la siguiente forma:

$$y = xy' + g(y')$$

La solución de la ecuación diferencial de Clairouts se obtiene siguiendo el mismo procedimiento del caso de la ecuación diferencial de Lagrange.

c. **Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $2y = xy' + y'\,\text{Ln}\,y'$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos en la forma:

$$y = x\frac{y'}{2} + \frac{y'\,Lny'}{2} \quad ....(1)$$

Sea $y' = \dfrac{dy}{dx} = P \Rightarrow dy = Pdx$, reemplazando en (1)

$$y=x\frac{P}{2}+\frac{PLnP}{2}$$, diferenciando se tiene:

$$dy=\frac{P}{2}dx+\frac{x}{2}dp+\frac{LnP}{2}dp+\frac{dp}{2}$$, reemplazando dy = p dx

$$pdx=\frac{P}{2}dx+\frac{x}{2}dp+\frac{LnP}{2}dp+\frac{dp}{2}$$, simplificando

$$\frac{dx}{dp}-\frac{1}{P}x=\frac{LnP+1}{P}$$, que es una ecuación diferencial lineal.

cuya solución de ésta ecuación es:

$$x=e^{-\int-\frac{dp}{P}}\left[\int e^{\int-\frac{dp}{P}}\frac{LnP+1}{P}dp+c\right]=-LnP-2+pc.$$

y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\begin{cases} x=pc-LnP-2 \\ y=\frac{c}{2}p^2-P \end{cases}, P \text{ es un parámetro}$$

2. $y=2xy'+\text{sen } y'$

Solución

Sea $y'=\frac{dy}{dx}=P\Rightarrow dy=pdx$

reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

y = 2xp + sen P, diferenciando se tiene: dy = 2xdp + 2pdx + cos P. dp,

reemplazando dy = pdx, pdx = 2xdp + 2pdx + cos Pdp, simplificando

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{P}x=-\frac{\cos P}{P}$$, que es una ecuación lineal cuya solución de ésta ecuación es:

$$x=e^{-\int\frac{2dp}{P}}\left[\int e^{\int\frac{2dp}{P}}(-\frac{\cos P}{P})dp+c\right]=-\frac{\cos P}{P}-\text{sen } P+\frac{c}{P^2}$$

de donde la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\begin{cases} x=-\frac{\cos P}{P^2}-\text{sen } P+\frac{c}{P^2} \\ y=\frac{2c}{P}-\frac{2\cos P}{P}-\text{sen } P \end{cases}, P \text{ es un parámetro}$$

3. $y=xy'+\frac{a}{y'^2}$

Solución

Sea $y'=\frac{dy}{dx}=P\Rightarrow dy=pdx$, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$y=xp+\frac{a}{P^2}$, diferenciando ambos miembros

$dy=xdp+pdx-\frac{2a}{P^3}dp$, reemplazando dy = pdx

$$pdx=xdp+pdx-\frac{2a}{P^3}dp\Rightarrow(x-\frac{2a}{P^3})dp=0$$

de donde $x=\frac{2a}{P^3}\ \vee\ dp=0\Rightarrow P=c$ Luego

$$\begin{cases} x=\frac{2a}{c^3} \\ y=xc+\frac{a}{c^2} \end{cases}$$

4. $y=xy'+y'^{2}$

Solución

Sea $y' = \frac{dy}{dx} = P \Rightarrow dy = pdx$ reemplazando en la ecuación dada: $y = xp + P^2$.

diferenciando $\Rightarrow dy = xdp + pdx + 2pdp$

al sustituir $dy = pdx$ se tiene:

$pdx = xdp + pdx + 2pdp \Rightarrow (x + 2p)\,dp = 0$ de donde

$$\begin{cases} x + 2P = 0 \\ dp = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -2P \\ P = c \end{matrix}$$

Luego: $\begin{cases} x = -2c \\ y = xc + c^2 \end{cases}$

d. Ejercicios Propuestos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y = 2xy' + \text{Ln}\, y'$ Rpta: $\begin{cases} x = \dfrac{c}{P^2} - \dfrac{1}{P} \\ y = \dfrac{2c}{P} + LnP - 2 \end{cases}$

2. $y = x(1 + y') + y'^2$ Rpta: $\begin{cases} x = 2(1-P) + ce^{-P} \\ y = 2(1-P) + ce^{-P}(1+P) + P^2 \end{cases}$

3. $y = -xy'^2 + y'^2 + 1$ Rpta: $y = 1 + (c - \sqrt{1-x})^2$

4. $y = 2xy' - 2y' + 1$ Rpta: $(y - 1)^2 = c\,(x - 1)$

5. $y = 2xy'^2 + y'$ Rpta: $\begin{cases} x(2P-1)^2 = LnP - 2P + c \\ y = 2xp^2 + P \end{cases}$

6. $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$ Rpta: $\begin{cases} x = \dfrac{c}{P^3} - 2e^P\left(\dfrac{1}{P} - \dfrac{2}{P^2} + \dfrac{2}{P^3}\right) \\ y = \dfrac{3c}{2P^2} - 2e^P\left(1 - \dfrac{3}{P} + \dfrac{3}{P^2}\right) \end{cases}$

7. $y = xy'^2 - \frac{1}{y'}$ Rpta: $\begin{cases} x = \dfrac{cp^2 + 2p - 1}{2p^2(P-1)^2} \\ y = \dfrac{cp^2 + 2p - 1}{2(P-1)^2} - \dfrac{1}{P} \end{cases}$

8. $y = (x + 1)\,y'^2$ Rpta: $\begin{cases} x = \dfrac{2p - p^2 + c}{(P-1)^2} \\ y = (x+1)P \end{cases}$

9. $y = x\,\text{sen}\,y' + \cos y'$

Rpta: $\begin{cases} x\exp\left(\int_0^t \dfrac{\cos u\,du}{\text{sen}\,u - u}\right) = \int_0^t \dfrac{\text{sen}\,u}{\text{sen}\,u - u}\exp\left(\int_0^n \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,z - z}dz\right)du \\ y = x\,\text{sen}\,P + \cos P \end{cases}$

10. $y = 2xy' - 2y' + 1$ Rpta: $(y - 1)^2 = c\,(x - 1)$

11. $yy'^2 + (2x - 1)\,y' = y$ Rpta: $y^2 = 2\,(1 + 2c)\,(x + c)$

12. $y = -xy'^2 + y'^2 + 1$ Rpta: $y = 1 + (c - \sqrt{1-x})^2,\ y = 1$

13. $y = (y' - 1)\,x + ay' + b$ Rpta: $y = (x + a)\,\text{Ln}\,(x + a) + c\,(x + a) + b - x$

14. $y = m\,xy' + ay' + b$ Rpta: $m\,(y - b) = (1 - m)\,(mx + a)\,\text{Ln}\,(mx + a)$

15. $y + xy' = y'^2$ Rpta: $\begin{cases} x = \dfrac{2p}{3} + cp^{-1/2} \\ y = -xp + P^2 \end{cases}$

16. $y'^3 - xy' + 2y = 0$ Rpta: $\begin{cases} x = P(c - 3P) \\ 2y = P^2(c - 4P) \end{cases}$

17. $2y'^2 + xy' - 2y = 0$ Rpta: $\begin{cases} x = 4PLn(pc) \\ y = P^2[1 + 2Ln(pc)] \end{cases}$

18. $2y'^3 + xy' - 2y = 0$ Rpta: $\begin{cases} x = 2P(3P + c) \\ 2y = P^2(4p + c) \end{cases}$

19. $y = xy' + y'^2$ Rpta: $y = cx + c^2$

20. $y = xy' - 3y'^3$ Rpta: $y = cx - 3c^3$

21. $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$ Rpta: $y = cx + \dfrac{1}{c}$

22. $y = xy' + \dfrac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$ Rpta: $y = cx + \dfrac{ac}{\sqrt{1+c^2}}, x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

23. $y = xy' + a\sqrt{1+y'^2}$ Rpta: $y = cx + a\sqrt{1+c^2}, x^2 + y^2 = a^2$

24. $y = xy' + \dfrac{a}{y'^2}$ Rpta: $y = xc + \dfrac{a}{c^2}$

25. $y = xy' + \operatorname{sen} y'$ Rpta: $y = cx + \operatorname{sen} c$

26. $y' = Ln(xy' - y)$ Rpta: $y = cx - e^c$

27. $y = xy' - y'^2$ Rpta: $y = cx - c^2$

28. $y = xy' + \sqrt{1-y'^2}$ Rpta: $y = cx + \sqrt{1-c^2}$

29. $y = xy' - e^{y'}$. Rpta: $y = cx - e^c$

30. $y = xy' + \dfrac{1}{\sqrt{y'-1}}$ Rpta: $y = cx + \dfrac{1}{\sqrt{c-1}}$

31. $y = xy' - \sqrt{1-y'^2} - arc.\cos y'$ Rpta: $y = cx + \sqrt{1-c^2} - c.arc.\cos c$

32. $y + y'^2 = y'x$ Rpta: $y = cx - c^2$

33. $y = xy' + a\sqrt[3]{1-y'^3}$ Rpta: $y = cx + a\sqrt[3]{1-c^3}$

34. $xy' - y = Ln\, y'$ Rpta: $y = cx - Ln\, c$

35. $y = xy' - 3y'^3$ Rpta: $y = cx - 3c^3$

36. $y = (x + 1)y' + y'^2$ Rpta: $y = cx + c + c^2$

37. $y = xy' + y' - y'^2$ Rpta: $y = cx + c - c^2$

38. $y = (x + 1)y' - 1$ Rpta: $y = cx + c - 1$

39. $y = xy' + \sqrt{1+y'}$ Rpta: $y = cx + \sqrt{1+c}$

40. $(y - \sqrt{1+y'^2})dx - xdy = 0$ Rpta: $y = cx + \sqrt{1+c^2}$

2.12. Ecuaciones Diferenciales no Resueltas con Respecto a la Primera Derivada.

1° Ecuación de primer orden y de grado n con respecto a y´

Las ecuaciones diferenciales de primer orden y de grado n con respecto a y´ son de la siguiente forma:

$$(y')^n + P_1(x,y)(y')^{n-1} + P_2(x,y)(y')^{n-2} + P_{n-1}(x,y)\,y' + P_n(x,y) = 0 \;....(1)$$

Para encontrar la solución de estas ecuaciones diferenciales, se resuelve la ecuación (1) con respecto a y´; como la ecuación (1) es de grado n, entonces se puede tener:

$$y' = f_1(x,y),\; y' = f_2(x,y),\; y' = f_3(x,y)...,\; y' = f_K(x,y),\; (K \le n)....(2)$$

que son las soluciones reales de la ecuación (1)

Luego el conjunto de las soluciones de la ecuación (2) es:

$$\varphi_1(x,y,c_1) = 9,\; \varphi_2(x,y,c_2) = 0, ...,\; \varphi_K(x,y,c_K) = 0$$

donde $\varphi_i(x,y,c_i) = 0$, $i = 1,2,..., K$ es la solución de la ecuación diferencial $y' = f_i(x,y)$ c, i=1,2,...K y que representa la solución general de la ecuación (1).

2° **Ecuaciones diferenciales de la forma f (y,y′) = 0**

Cuando en esta ecuación diferencial se puede despejar y′ se obtiene ecuaciones diferenciales de variable separable, por lo tanto nuestro interes está en los demás casos.

a) Si en la ecuación diferencial f (y,y′) = 0 se puede despejar y, es decir:

$$y = \varphi(y') \;..............(1)$$

entonces para obtener la solución se introduce un parámetro $y' = \frac{dy}{dx} = P$ en la ecuación (1). es decir:

$$y = \varphi(P) \;..............(2)$$

ahora diferenciando la ecuación (2) se tiene:

$$dy = \varphi'(P)\,dp \;.........(3)$$

Como $\frac{dy}{dx} = P \Rightarrow dy = pdx$ que al sustituir en (3)

se tiene: $pdx = \varphi'(P)\,dp$ de donde

$$dx = \frac{\varphi'(P)}{P}dp \Rightarrow x = \int \frac{\varphi(P)}{P}dp + c$$

y la solución de la ecuación diferencial se ha dado en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(P)}{P}dp + c \\ y = \varphi(P) \end{cases}$$

b) Si en la ecuación diferencial f (y,y′) = 0, no se puede despejar ni y, ni y′, pero estas últimas pueden expresarse en forma paramétricas mediante algún parámetro t.

$$y = \varphi(t); \quad y' = \varphi(t) \quad (P = \frac{dy}{dx})$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(t) \Rightarrow dy = \varphi(t)dx$$

Como $y = \varphi(t) \Rightarrow dy = \varphi(t)dt$, de donde

$$\varphi(t)dx = \varphi(t)dt \Rightarrow dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)} \text{ de donde}$$

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)} + c$$

y la solución de la ecuación diferencial es dada en forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt + c \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

3° **Ecuaciones diferenciales de la forma f (x,y′) = 0**

Si en la ecuación diferencial f (x,y′) = 0, se puede despejar x es decir:

$$x = \varphi(y') \;....(1)$$

de donde para obtener la solución se hace

y′ = P de donde en la ecuación (1) se tiene:

$$x = \varphi(P) \Rightarrow dx = \varphi'(P)\,dp \;....(2)$$

Además

$$\frac{dy}{dx} = P \Rightarrow dx = \frac{dy}{P} \;....(3)$$

de (2) y (3) se tiene $\frac{dy}{P} = \varphi'(P)dp$ de donde

$$dy = P\varphi'(P)dp \Rightarrow y = \int P\varphi'(P)dp$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es dada en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = \varphi(P) \\ y = \int P\varphi'(P)dp \end{cases}$$

a. **Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones.

1. $y'^2 - (2x + y)\,y' + (x^2 + xy) = 0$

Solución

$y'^2 - (2x + y)\,y' + (x^2 + xy) = 0$, despejando y' se tiene:

$$y' = \frac{2x+y\pm\sqrt{(2x+y)^2-4(x^2+xy)}}{2} = \frac{2x+y\pm y}{2} \quad \text{de donde}$$

$$\begin{cases} y'_1 = x+y \\ y'_2 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = ce^x - x - 1 \\ y_2 = \dfrac{x^2}{2} + c \end{array}$$

2. $xy'^2 + 2xy' - y = 0$

Solución

$xy'^2 + 2xy' - y = 0$, despejando y' se tiene:

$$y' = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4xy)}}{2x} \quad \text{simplificando}$$

$$y' = -1 \pm \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}} \quad \text{de donde } z^2 = x + y$$

$$2z\frac{dz}{dx} = 1 + y' \Rightarrow y' = 2z\frac{dz}{dx} - 1 \quad \text{de donde}$$

$$2z\frac{dz}{dx} - 1 = -1 \pm \frac{z}{\sqrt{x}} \Rightarrow 2z\frac{dz}{dx} = \pm\frac{z}{\sqrt{x}}$$

$$2dz = \pm\frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \text{integrando} \quad z = \pm\sqrt{x} + c$$

$$\sqrt{x+y} = \pm\sqrt{x} + c \Rightarrow x + y = x + c^2 \pm 2c\sqrt{x}$$

3. $y = y'^2 e^{y'}$

Solución

Sea $y' = P \Rightarrow dy = pdx$

$y = p^2 e^p \Rightarrow dy = (2\,p\,e^p + p^2 e^p)\,dp$

$pdx = (2\,p\,e^p + p^2 e^p)\,dp$

$dx = (2\,e^p + p\,e^p)\,dp$, integrando

$x = e^p + p\,e^p + c$

$$\therefore \begin{cases} x = e^p + pe^p + c \\ y = p^2 e^p \end{cases}$$

4. $y^{2/5} + y'^{2/5} = a^{2/5}$

Solución

Sea $\begin{cases} y = a\cos^5 t \\ y' = a\,\text{sen}^5\, t = P \end{cases}$

$$dx = \frac{dy}{P} = -\frac{5a\cos^4 t\,\text{sen}\,t}{a\,\text{sen}^5\, t}\,dt = -5\,\text{ctg}^4\, t\,dt$$

$$dx = -5\,\text{ctg}^4\, t\,dt \quad \text{integrando} \quad x = \frac{5\,\text{ctg}^3\, t}{3} - 5\,\text{ctg}\, t + 5t + c$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{5\,\text{ctg}^3\, t}{3} - 5\,\text{ctg}\, t + 5t + c \\ y = a\cos^5 t \end{cases}$$

5. $y^4 - y'^4 - y\,y'^2 = 0$

Solución

Sea $y' = y\,t$ reemplazando en la ecuación

$y^4 - y^4 t^4 - y^3 t^2 = 0 \Rightarrow y - y\,t^4 - t^2 = 0$

$$y(1-t^4)=t^2 \Rightarrow y=\frac{t^2}{1-t^4} \text{ diferenciando}$$

$$dy=\frac{2t^5+2t}{(1-t^4)^2}\,dt \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

como $y' = P \Rightarrow y = p/t$ puesto que $y' = y\,t$

$$\frac{P^4}{t^4}-P^4-\frac{P^3}{t}=0 \Rightarrow P=\frac{t^3}{1-t^4} \quad \text{Como } P=\frac{dy}{dx}$$

$$dy=\frac{t^3}{1-t^4}\,dx \ldots (2)$$

de (1) y (2) se tiene:

$$\frac{t^3dx}{1-t^4}=\frac{2t^5+2t}{(1-t^4)^2}\,dt \Rightarrow dx=\frac{2(t^4+1)dt}{(t^4-1)t^2} \quad \text{integrando}$$

$$x=-2\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{t-1}+\frac{Et+F}{t^2+1}\right)dt$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{2}{t}+Ln\left|\dfrac{t+1}{t-1}\right|-2arc\ \mathrm{tg}\,t+c \\ y=\dfrac{t^2}{1-t^4} \end{cases}$$

6. $x = Ln\, y' + sen\, y'$

Solución

Sea $y' = P \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{P}$

$x = Ln\, P + sen\, P$ diferenciando se tiene:

$$dx=\frac{dp}{P}+\cos p.dp \quad \text{Como } dx=\frac{dy}{P}$$

$$\frac{dy}{P}=\frac{dp}{P}+\cos pdp \Rightarrow dy=dp+P\cos pdp. \text{ integrando}$$

$y = P + P\, sen\, P + \cos P + c$

$$\therefore \begin{cases} x=LnP+senP \\ y=P+P\,sen\,P+\cos P+c \end{cases}$$

b. **Ejercicios Propuestos.**

Resolver los siguientes ejercicios.

1. $y'^2 - 2y\,y' = y^2(e^x - 1)$ Rpta: $Ln(K\,y) = x \pm 2\,e^{x/2}$

2. $x^2y'^2 + 3xy\,y' + 2y^2 = 0$ Rpta: $xy = c,\ x^2y = K$

3. $xy'^2 - 2y\,y' + x = 0$ Rpta: $y=\dfrac{cx^2}{2}+\dfrac{1}{2c},\quad y=\pm x$

4. $y'^2 - 2xy' - 8x^2 = 0$ Rpta: $y = 2x^2 + c,\quad y = -x^2 + K$

5. $y'^3 + (x+2)\,e^y = 0$ Rpta: $4\,e^{-y/3} = (x+2)^{4/3} + c$

6. $y'^3 - y\,y'^2 - x^2y' + x^2y = 0$ Rpta: $y=\dfrac{x^2}{2}+c,\ y=-x^2/2+K,\quad y=Ae^x$

7. $y'^4 - (x+2y+1)\,y'^3 + (x+2y+2xy)\,y'^2 - 2xy\,y' = 0$

Rpta: $y = c_1,\ y = x + c_2,\ 2y = x^2 + c_3,\ y = c_4\,e^{2x}$

sug: $y'(y'-1)(y'-x)(y'-2y) = 0$

8. $xy\,y'^2 + (x^2 + xy + y^2)\,y' + x^2 + xy = 0$

Rpta: $2xy + x^2 - c = 0,\ x^2 + y^2 = c$

9. $(x^2 + x)\,y'^2 + (x^2 + x - 2xy - y)\,y' + y^2 - xy = 0$

Rpta: $y = c\,(x+1),\ y = -x - Ln\,c\,x$

10. $x^2y'^2 + xy\,y' - 6y^2 = 0$ Rpta: $y = c\,x^2,\ y = c/x^3$

11. $xy'^2 + (y - 1 - x^2)\,y' - x\,(y-1) = 0$ Rpta: $2y - x^2 = c,\ xy - x = c$

12. $yy'^2 + (x - y)\,y' - x = 0$ Rpta: $y = x + c,\ y^2 + x^2 = c$

13. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$ Rpta: $y + \sqrt{y^2 - x^2} = cx^2\ (y + \sqrt{y^2 - x^2}) = c$

14. $y'^4 - (x + 2y + 1)\,y'^3 + (x + 2y + 2xy)\,y'^2 - 2xy\,.\,y' = 0$

Rpta: $y = c,\ y - x = c,\ 2y - x^2 = c,\ y = c\,e^{2x}$

15. $xyy'^2 + (x^2 + xy + y^2)\,y' + x^2 + xy = 0$ Rpta: $2xy + x^2 - c = 0,\ x^2 + y^2 - c = 0$

16. $(x^2 + x)y'^2 + (x^2 + x - 2xy - y)\,y' + y^2 - xy = 0$

Rpta: $y - c\,(x + 1) = 0,\ y + x\,\mathrm{Ln}\,(c\,x) = 0$

17. $x^2 y'^2 + xy\,y' - 6y^2 = 0$ Rpta: $y - cx^2 = 0,\ y = c\,x^{-3}$

18. $xy'^2 + (y - x^2 - 1)\,y' - x\,(y - 1) = 0$ Rpta: $2y - x^2 + c = 0,\ xy - x + c = 0$

19. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$ Rpta: $cy = x^2 + c^2$

20. $3x^4 y'^2 - xy' - y = 0$ Rpta: $xy = c\,(3\,c\,x - 1)$

21. $y = a(\frac{dy}{dx})^2 + b(\frac{dy}{dx})^3, a, b$ constantes. Rpta: $\begin{cases} x = 2ap + \dfrac{3bp^2}{2} + c \\ y = PLnP \end{cases}$

22. $y = y'\,\mathrm{Ln}\,y'$ Rpta: $\begin{cases} x = \dfrac{(LnP + 1)^2}{2} + c \\ y = PLnP \end{cases}$

23. $y = y'\,(1 + y'\cos y')$ Rpta: $\begin{cases} x = LnP + \operatorname{sen} P + P.\cos P + c \\ y = P + P^2 \cos P \end{cases}$

24. $y = (y' - 1)\,e^{y'}$ Rpta: $\begin{cases} x = e^P + c \\ y = (P - 1)e^P, \quad y = -1 \end{cases}$

25. $y = \mathrm{arc.\,sen}\,y' + \mathrm{Ln}\,(1 + y'^2)$ Rpta: $\begin{cases} x = 2arc.\operatorname{tg} P - Ln\left|\dfrac{1 + \sqrt{1 - P^2}}{P}\right| + c \\ y = arc.\operatorname{sen} P + Ln(1 + P^2) \end{cases}$

26. $y' = e^{y'/y}$ Rpta: $\begin{cases} x = Ln(LnP) + \dfrac{1}{LnP} + c \\ y = P / LnP \end{cases}$

27. $y'^2 + e^y = 2$ Rpta: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} Ln\left|\dfrac{P - \sqrt{2}}{P + \sqrt{2}}\right| + c \\ y = Ln(2 - P^2) \end{cases}$

28. $y^{2/3} + y'^{2/3} = 1$ Rpta: $\begin{cases} x = 3t + 3c\operatorname{tg} t + c \\ y = \cos^3 t \end{cases}$

29. $x = y'^2 - 2y'^2 + 2$ Rpta: $\begin{cases} x = P^2 - 2p + 2 \\ y = \dfrac{2}{3}P^3 - P^2 + c \end{cases}$

30. $x\,(1 + y'^2) = 1$ Rpta: $y + c = \pm(\sqrt{x - x^2} + arc.\operatorname{sen}\sqrt{x})$

31. $y'^2 x = e^{1/y'}$ Rpta: $\begin{cases} x = \dfrac{e^{1/P}}{P^2} \\ y = \dfrac{{}^{1/P}(P + 1)}{P} + c \end{cases}$

32. $x\,(1 + y'^2)^{3/2} = a$ Rpta: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = -a\operatorname{sen}^3 t + c \end{cases}$

33. $x = y' + \operatorname{sen} y'$ Rpta: $\begin{cases} x = P + \operatorname{sen} P \\ y = \dfrac{P^2}{2} + P\operatorname{sen} P + \cos P + c \end{cases}$

34. $x\sqrt{1+y'^2} = y'$ Rpta: $\begin{cases} x = \dfrac{P}{\sqrt{1-P^2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1+P^2}} + c \end{cases}$

35. $x = y'^3 - y'$ Rpta: $\begin{cases} x = P^3 - P \\ y = \dfrac{3P^4}{4} - \dfrac{P^2}{2} + c \end{cases}$

2. 13. Soluciones Singulares

Consideremos una ecuación diferencial de la forma:

$$F(x, y, y') = 0 \text{ ....(1)}$$

Llamaremos solución singular a $y = \varphi(x)$ de la ecuación (1) si en cada punto se infringe la propiedad de unicidad, es decir, si por cada uno de sus puntos (x_0, y_0) además de esta solución pasa también otra solución que tiene en el punto (x_0, y_0) la misma tangente que la solución $y = \varphi(x)$, pero no coincide esta última en ningún entorno del punto (x_0, y_0) arbitrariamente pequeño.

A la gráfica de una solución singular se denomina curva integral singular de la ecuación (1).

Si $F(x,y,y') = 0$ y sus derivados parciales $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ $y\dfrac{\partial F}{\partial y'}$, son continuas con respecto a todos sus argumentos x,y,y'.

Entonces cualquier solución singular de la ecuación (1).

También satisface a la ecuación:

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 0 \text{.......................(2)}$$

Por lo tanto para hallar las soluciones singulares de la ecuación (1) se elejirá y' entre las ecuaciones (1) y (2) obteniendo la ecuación.

$$\psi(x,y) = 0 \text{.................................(3)}$$

A la ecuación (3) se denomina P - discriminante de la ecuación (1) y la curva determinada por la ecuación (3) se denomina curva P - discriminante (C.P.D.) siempre ocurre que una curva P - discriminante se descompone en unas cuantas ramas, en este caso debe averiguarse si cada una de estas ramas por separado es solución de la ecuación (1) si es afirmativo se debe comprobar si es solución singular, es decir, si se infringe la unicidad en cada uno de sus puntos.

Llamaremos envolvente de una familia de curvas.

$$\phi(x, y, c) = 0 \text{ ....(4)}$$

a la curva que en cada uno de sus puntos es tangente a una de las curvas de la familia (4) siendo cada segmento de la misma tangente a una infinidad de curvas de la familia (4).

Si la solución (4) es la integral general (1), la envolvente de la familia de curvas (4), en caso que exista, será una curva integral singular de esta ecuación.

En efecto, en los puntos de la envolvente los valores x, y, y' coinciden con los valores correspondientes de la curva integral que es tangente a la envolvente en el punto (x,y), por lo tanto en cada punto de la envolvente los valores x,y, y' satisfacen a la ecuación $F(x,y,y') = 0$ es decir la envolvente es una curva integral.

Además en cada punto de la envolvente se infringe la unicidad, puesto que por cada punto de la misma pasan al menos dos curvas integrales en una misma dirección, la envolvente y la curva integral de la familia (4) que es tangente a esta en el punto considerado.

En consecuencia, la envolvente es una curva integral singular, además por el curso de análisis matemático se conoce que la envolvente forma parte de la curva c - discriminante (C.C.D.) determinada por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \phi(x,y,c) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi(x,y,c)}{\partial c} = 0 \end{cases} \text{.....................(5)}$$

Una rama de la curva c - discriminante es envolvente, cuando en ella se cumple las condiciones siguientes.

1° Que las derivadas parciales $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}, \dfrac{\partial \phi}{\partial y}$ existan y sus módulos están acotados.

$\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right| \le M, \left|\frac{\partial\phi}{\partial y}\right| \le N$, donde M y N son constantes

2° $\frac{\partial\phi}{\partial x} \ne 0$ ó sino $\frac{\partial\phi}{\partial y} \ne 0$

Observaciones

a) Las condiciones 1° y 2° solamente son suficientes, por lo cual pueden ser envolventes también las ramas de la curva c - discriminante en las que no se cumple algunas de estas condiciones.

b) En el caso general, el P - discriminante contiene:

i) A la envolvente (E)
ii) Al lugar geométrico de los puntos de contacto al cuadrado (C^2)
iii) Al lugar geométrico de los puntos cúspides (ó de retroceso) (R)

$$\Delta p = E.C^2.R$$

c) El c - discriminante contiene:

i) A la envolvente (E)
ii) Al lugar geométrico de los puntos Anocdales al cuadrado (A^2)
iii) Al lugar geométrico de los puntos cuspidales (o de retroceso) al cubo (R^3)

$$\Delta c = E.A^2.R^3$$

Entre todos los lugares geométricos solamente la envolvente es solución (singular) de la ecuación diferencial.

Esta figura tanto en la curva P - discriminante como en la curva c - discriminante a la primera potencia, circunstancia que facilita la averiguación de la solución singular.

Ejemplos:

1. Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe, de la ecuación: $(\frac{dy}{dx})^2 + 4x^5\frac{dy}{dx} - 12x^4 y = 0$

Solución

Sea $\frac{dy}{dx} = P \Rightarrow dy = pdx$

$p^2 + 4x^5 p - 12x^4 y = 0$ diferenciando

$2\,pdp + 20x^4 pdx + 4x^5 dp - 48x^3 y\,dx - 12x^4 dy = 0$

$$2pdp + 20x^4 pdx + 4x^5 dp - 48x^3(\frac{p^2+4x^5 p}{12x^4})dx - 12x^4 pdx = 0$$

$$(2p+4x^5)dp + 20x^4 pdx - 4\frac{(p^2+4x^5 p)}{x}dx - 12x^4 pdx = 0$$

$$(2p+4x^5)dp + 8x^4 pdx - \frac{4p^2}{x}dx - 16x^4 pdx = 0$$

$$(2p+4x^5)dp - (\frac{4p^2}{x} + 8x^4 p)dx = 0$$

$$2x(p+2x^5)\frac{dp}{dx} - 4p(p+2x^5) = 0$$

$$(p+2x^5)(x\frac{dp}{dx} - 2p) = 0 \Leftrightarrow (p+2x^5) = 0 \quad \vee \quad x\frac{dp}{dx} - 2p = 0$$

Si $x\frac{dp}{dx} = 2p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow Lnp = 2\,Lnx + LnK$

$$Lnp = LnKx^2 \Rightarrow P = Kx^2$$

reemplazando $p = K\,x^4$ en la ecuación $p^2 + 4x^5 p - 12x^4 y = 0$

se tiene $K^2 x^4 + 4\,K\,x^7 = 12x^4 y \Rightarrow K^2 + 4\,K\,x^3 = 12y$

$\therefore$ $K(K + 4x^3) = 12y$ solución general.

Si $p + 2x^5 = 0 \Rightarrow p = -2x^5$ reemplazando este valor en la ecuación dada tenemos:

$4x^{10} - 8x^{10} = 12x^4 y \Rightarrow 3y = -x^6$ solución singular.

2. Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe, de la ecuación: $x^3(\frac{dy}{dx})^2 + x^2 y\frac{dy}{dx} + 1 = 0$

Solución

Sea $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = pdx$

$x^3p^2 + x^2py + 1 = 0 \Rightarrow y = -xp - \frac{1}{x^2 p}$ diferenciando

$dy = -xdp - pdx + \frac{2dx}{x^3 p} + \frac{dp}{p^2 x^2}$ pero dy = pdx

$pdx = -xdp - pdx + \frac{2dx}{x^3 p} + \frac{dp}{p^2 x^2}$

$(2p - \frac{2}{x^3 p})dx + (x - \frac{1}{p^2 x^2})dp = 0$

$x(1 - \frac{1}{p^2 x^3})\frac{dp}{dx} + 2p(1 - \frac{1}{x^3 p^2}) = 0$

$(1 - \frac{1}{x^3 p^2})(x\frac{dp}{dx} + 2p) = 0$

$1 - \frac{1}{x^3 p^2} = 0 \vee x\frac{dp}{dx} + 2p = 0$

Si $x\frac{dp}{dx} + 2p = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} + 2\frac{dx}{x} = 0$

Ln p + 2 Ln x = Ln K $\Rightarrow$ Ln p x^2 = Ln K

$px^2 = K \Rightarrow p = \frac{K}{x^2}$

reemplazando en la ecuación $x^3 p^2 + x^2 p y + 1 = 0$

$\frac{K}{x^2} + Ky + 1 = 0 \Rightarrow K^2 + Kxy + x = 0$ solución general.

Si $1 - \frac{1}{x^3 p^2} = 0 \Rightarrow p^2 = \frac{1}{x^3} \Rightarrow p = x^{-3/2}$ reemplazando

en la ecuación $x^3 p^2 + x^2 p y + 1 = 0$ se tiene

$1 + x^2 x^{-3/2} y + 1 = 0 \Rightarrow 2 + \sqrt{x}y = 0$

$y = -\frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow y^2 x - 4 = 0$ solución singular

3. Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe, de la ecuación: $x(\frac{dy}{dx})^3 - 2y(\frac{dy}{dx})^2 - 16x^2 = 0$

Solución

Sea $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = pdx$

$xp^3 - 2yp^2 - 16x^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{xp}{2} - \frac{8x^2}{p^2}$

diferenciando $dy = \frac{x}{2}dp + \frac{p}{2}dx - \frac{16x}{p^2}dx + \frac{16x^2}{p^3}dp$

Como $dy = pdx \Rightarrow pdx = \frac{x}{2}dp + \frac{p}{2}dx - \frac{16x}{p^2}dx + \frac{16x^2 dp}{p^3}$

$(\frac{x}{2} + \frac{16x^2}{p^3})dp - (\frac{p}{2} + \frac{16x}{p^2})dx = 0$

$x(\frac{1}{2} + \frac{16x}{p^3})\frac{dp}{dx} - p(1/2 + \frac{16x}{p^3}) = 0$

$(\frac{1}{2} + \frac{16x}{p^3})(x\frac{dp}{dx} - p) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{16x}{p^3} = 0 \quad \vee \quad x\frac{dp}{dx} - p = 0$

Si $x\frac{dp}{dx} - p = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} - \frac{dx}{x} = 0$ integrando

$Lnp - Lnx = LnK \Rightarrow Ln\frac{p}{x} = LnK \Rightarrow p = Kx$

reemplazando en la ecuación $y = \frac{xp}{2} - \frac{8x^2}{p^2}$

se tiene $y = \frac{Kx^2}{2} - \frac{8x^2}{K^2 x^2} \Rightarrow y = \frac{Kx^2}{2} - \frac{8}{K^2}$

$\therefore$ $2K^2 y = K^3 x^2 - 16$ es la solución general

Si $\frac{1}{2}+\frac{16x}{p^3}=0 \Rightarrow \frac{16x}{p^3}=-1/2 \Rightarrow \frac{p^3}{16x}=-2$

$p^3=-32x \Rightarrow p=-2\sqrt[3]{4}\,x^{1/3}$ reemplazando en la ecuación

$y=\frac{xp}{2}-\frac{8x^2}{p^2}$ se tiene

$$y=\frac{x(-2\sqrt[3]{4}x^{1/3})}{2}-\frac{8x^2}{4\sqrt[3]{16}x^{2/3}} \Rightarrow y=-\sqrt[3]{4}x^{4/3}-\frac{2x^{4/3}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$y=-(\frac{3x^{4/3}}{\sqrt[3]{2}}) \Rightarrow 2y^3=-27x^4$$

$\therefore\ 2y^3+27x^4=0$ solución singular

b. **Ejercicios Propuestos**

Encontrar la solución general (S.G) y también la solución singular (S.S.) si ella existe de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y=x\frac{dy}{dx}-2(\frac{dy}{dx})^2$ Rpta: S.G.: $y=kx-2k^2$
   S. S.: $8y=x^2$

2. $y^2(\frac{dy}{dx})^2+3x\frac{dy}{dx}-y=0$ Rpta: S.G.: $y^3+3kx-k^2=0$
   S.G.: $9x^2+4y^3=0$

3. $x(\frac{dy}{dx})^2-2y\frac{dy}{dx}+4x=0$ Rpta: S.G.: k^2x^2-ky+1
   S.S.: $y^2-4x^2=0$

4. $x(\frac{dy}{dx})^2-2y\frac{dy}{dx}+x+2y=0$ Rpta: S.G.: $2x^2+2k(x-y)+k^2=0$
   S.S.: $x^2+2xy-y^2=0$

5. $(1+y'^2)y^2-4yy'-4x=0$ Rpta: S.S.: $y^2=4x+4$

6. $y'^2-4y=0$ Rpta: S.S.: $y=0$

7. $y'^3-4xyy'+8y^2=0$ Rpta: S.S.: $y=0,\ y=\frac{4}{27}x^3$

8. $y'^2-y^2=0$ Rpta: No hay S.S.

9. $(\frac{dy}{dx})^2+x^3\frac{dy}{dx}-2x^2y=0$ Rpta: S.G.: $k^2+kx^2=2y$
   S.S.: $8y=-x^4$

10. $2x(\frac{dy}{dx})^3-6y(\frac{dy}{dx})^2+x^4=0$ Rpta: S.G.: $2k^3x^3=1-6k^2p$
    S.S.: $2y=x^2$

11. $(\frac{dy}{dx})^2-x\frac{dy}{dx}+y=0$ Rpta: S.G.: $y=kx-k^2$
    S.S.: $4y=x^2$

12. $y=x\frac{dy}{dx}+K(\frac{dy}{dx})^2$ Rpta: S.G.: $y=kx+k^2c$
    S.S.: $x^2=-4ky$

13. $x^8(\frac{dy}{dx})^2+3x\frac{dy}{dx}+9y=0$ Rpta: S.G.: $x^3(y+k^2)+k=0$
    S.S.: $4x^6y=1$

14. $x(\frac{dy}{dx})^2-2y\frac{dy}{dx}+4x=0$ Rpta: S.G.: $x^2=k(y-k)$
    S.S.: $y=2x\quad y=-2x$

15. $3x^4(\frac{dy}{dx})^2-x\frac{dy}{dx}-y=0$ Rpta: S.G.: $xy=k(3kx-1)$
    S.S.: $12x^2y=-1$

16. $x(\frac{dy}{dx})^2+(x-y)\frac{dy}{dx}+1-y=0$ Rpta: S.G.: $xk^2+(x-y)k+1-y=0$
    S.S.: $(x+y)^2=4x$

17. $x^6(\frac{dy}{dx})^3-3x\frac{dy}{dx}-3y=0$ Rpta: S.G.: $3xy=k(xk^2-3)$
    S.S.: $9x^3y^2=4$

18. $y=x^6(\frac{dy}{dx})^3-x(\frac{dy}{dx})$ Rpta: S.G.: $kxy=k(k^2x-1)$
    S.S.: $27x^3y^2=4$

19. $x(\frac{dy}{dx})^4-2y(\frac{dy}{dx})^3+12x^3=0$ Rpta: S.G.: $2k^3y=k^4x^2+12$
    S.S.: $3y^2=\pm 8x^3$

20. $x(\frac{dy}{dx})^3 - y(\frac{dy}{dx}) + 1 = 0$ Rpta: S.G.: $x k^3 - y k^2 + 1 = 0$

S.S.: $4y^3 = 27x^2$

21. $x(\frac{dx}{dy})^2 + y\frac{dx}{dy} = 3y^4$ Rpta: S.G.: $3y = k(1 + kxy)$

S.S.: $12xy^2 = -1$

22. $x(\frac{dy}{dx})^3 - 2y(\frac{dy}{dx})^2 + 4x^2 = 0$ Rpta: S.G.: $x^2 = 4k(y - 8k^2)$

S.S.: $8y^3 = 27x^4$

23. $4x^5(\frac{dy}{dx})^2 + 12x^4 y\frac{dy}{dx} + 9 = 0$ Rpta: S.G.: $x^3(2ky - 1) = k^2$

S.S.: $x^3 y^2 = 1$

24. $(\frac{dy}{dx} + 1)^2 (y - x\frac{dy}{dx}) = 1$ Rpta: S.G.: $(k + 1)^2 (y - kx) = 1$

S.S.: $4(x + y)^3 = 27x^2$

25. $4y(\frac{dy}{dx})^2 - 2x\frac{dy}{dx} + y = 0$ Rpta: S.G.: $kx = y^2 + k^2$

S.S.: $x = \pm 2y$

CAPITULO III

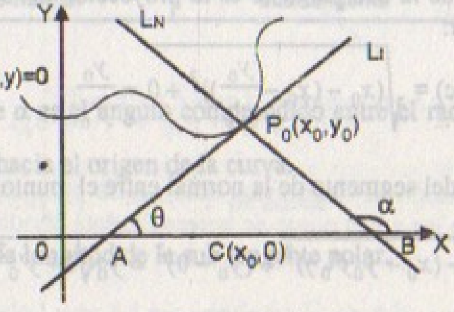
3. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

3.1. Problemas Geométricos

Consideremos una curva C descrita por la ecuación

$$C : F(x, y) = 0$$

y tomemos un punto $P_0(x_0, y_0)$ de la curva C



La pendiente de la recta tangente es: $mL_t = \frac{dy}{dx}\Big|_{P_0} = y'_0$

y la ecuación de la recta tangente es: L_t: $y - y_0 = y'_0 (x - x_0)$ ....(1)

La pendiente de la recta normal es: $m L_N = -\frac{1}{mL_t} = -\frac{1}{y'_0}$

y la ecuación de la recta normal es:

$$L_N : y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0) \quad ......(2)$$

ahora calculamos el punto de intersección de la recta tangente con el eje x.

Sea $A \in L_t \;\wedge\; eje \;\; x \Rightarrow y = 0$, de la ecuación de la tangente se tiene:

$-y_0 = y'_0 (x - x_0) \Rightarrow x = x_0 - \frac{y_0}{y'_0}$ de donde $A(x_0 - \frac{y}{y'_0},\; 0)$

También calcularemos el punto de intersección de la recta normal y el eje x.

Sea $B \in L_N \ \wedge\ eje\ x \Rightarrow y = 0$, de la ecuación (2) se tiene:

$$-y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0) \Rightarrow x = x_0 + y_0 y'_0$$

de donde B $(x_0 + y_0\, y'_0,\ 0)$

La longitud del segmento de la tangente entre el punto P_0 y el eje x es $L_T = d\,(A,P)$

$$L_T = \sqrt{(x_0 - (x_0 - \frac{y_0}{y'_0}))^2 + (y_0 - 0)^2} = \frac{y_0}{y'_0}\sqrt{1 + {y'_0}^2}$$

La longitud de la sub tangente es la proyección del segmento tangente AP_0 sobre el eje x es decir:

$$L\,S_T = d\,(A,c) = \sqrt{(x_0 - (x_0 - \frac{y_0}{y'_0}))^2 + 0} = \frac{y_0}{y'_0}$$

La longitud del segmento de la normal entre el punto P_0 y el eje x es: $L_N = d\,(B,P_0)$

$$L_N = \sqrt{(x_0 - (x_0 + y_0 y'_0))^2 + (y_0 - 0)^2} = y_0\sqrt{1 + {y'_0}^2}$$

La longitud de la sub normal es la proyección del segmento normal $\overline{BP_0}$ sobre el eje x, es decir

$$LS_N = d(C,B) = \sqrt{(x_0 + y_0 y'_0 - x_0)^2 + (0-0)^2} = y_0 y'_0$$

Generalizando estas longitudes en cualquier punto p(x,y) de la curva

C: F (x,y) = 0 se tiene:

$L_T = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}$ = longitud de la tangente

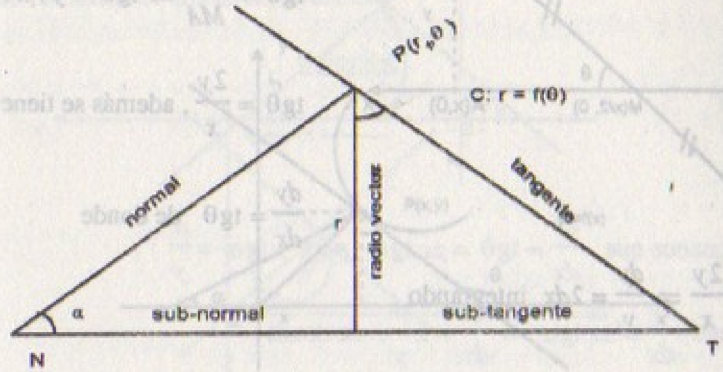
$LS_T = \frac{y}{y'}$ = longitud de la sub tangente

$L_N = y\sqrt{1 + y'^2}$ = longitud de la normal

$LS_N = yy'$ = longitud de la sub normal

para el caso en que la curva está dado en coordenadas polares. Consideremos la curva:

C: r = f (θ) y P (r ,θ) ∈ C entonces:



$\text{tg}\,\alpha = r\frac{d\theta}{dr}$, **donde α es el ángulo comprendido entre el radio vector y la parte de la tangente dirigida hacia el origen de la curva.**

$r\,\text{tg}\,\alpha = r^2\frac{d\theta}{dr}$, **es la longitud de la sub tangente polar.**

$rc\,\text{tg}\,\alpha = \frac{dr}{d\theta}$, **es la longitud de la sub normal polar**

$r\,\text{sen}\,\alpha = r^2\frac{d\theta}{ds}$, **es la longitud de la perpendicular desde el polo a la tangente.**

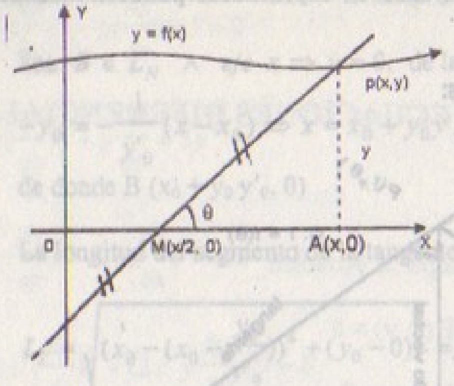
$ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2} = \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}\,d\theta$ **es un elemento de longitud de arco.**

$\frac{r^2 d\theta}{2}$, **es un elemento de área.**

a. Problemas Resueltos

1. **Hallar la ecuación de las curvas, tales que la parte de cada tangente, comprendida entre el eje y, y el punto de tangencia, queda dividido en dos partes iguales por el eje de las x.**

Solución



En el Δ M A P rectángulo se tiene:

$$tg\theta = \frac{AP}{MA} \Rightarrow tg\theta = y/x/2$$

$$tg\theta = \frac{2y}{x}$$, además se tiene

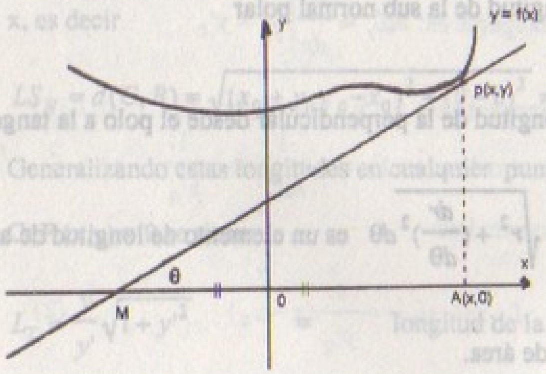
$$\frac{dy}{dx} = tg\theta$$ de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx$$ integrando

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} + c \Rightarrow Lny = 2Lnx + c \Rightarrow y = Kx^2$$

2. Hallar la ecuación de las curvas, tales que la parte de cada tangente, comprendida entre el eje de las x y el punto de tangencia, está dividido en dos partes iguales por el eje de las y.

Solución



En el Δ M A P se tiene:

$$tg\theta = \frac{AP}{MA} = \frac{y}{2x}$$

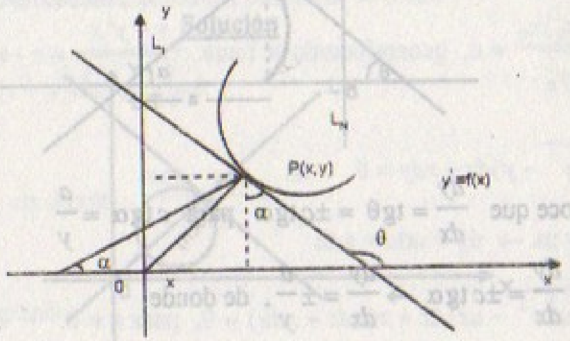
Como $tg\theta = y/2x$

Además $\frac{dy}{dx} = tg\theta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$

$$Lny = \frac{Lnx}{2} + c \Rightarrow y^2 = Kx$$

3. La tangente en cualquier punto de una curva y la recta que une ese punto con el origen forman un triángulo isósceles con base en el eje de las x. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto (2,2)

Solución



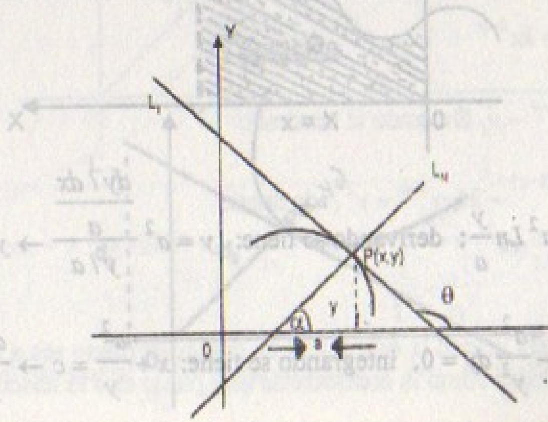
Como $LN \perp Lt \rightarrow tg\alpha . tg\theta = -1 \rightarrow tg\theta = -c\, tg\alpha = -\frac{y}{x}$

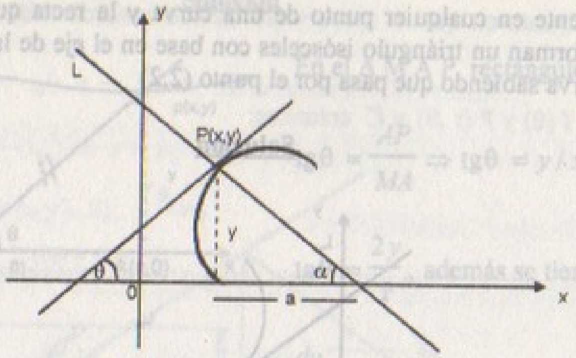
además $\frac{dy}{dx} = tg\theta = -ct\alpha \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, de donde

$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$, integrando Ln xy = Ln k, es decir: C: xy = k

pero (2,2) ∈ C → k = 4, ∴ xy = 4

4. Hallar la ecuación de una curva tal que, si en un punto cualquiera de ella, se trazan la normal y la ordenada, el segmento que ambos interceptan sobre el eje de las x es una constante a.





Se conoce que $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta = \pm c\operatorname{tg}\alpha$ para $c\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{y}$

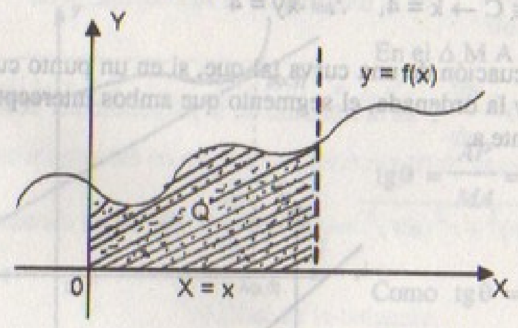
Luego $\frac{dy}{dx} = \pm c\operatorname{tg}\alpha \rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\frac{a}{y}$, de donde

$ydy = \pm\ adx$ integrando se tiene: $y^2 \pm 2ax = c$

5. Hallar una curva para la cual el área a Q, limitada por la curva, el eje Ox y las dos ordenadas.

$x = 0, x = x$, sea una función dada de y: $Q = a^2 \operatorname{Ln}\frac{y}{a}$

Solución



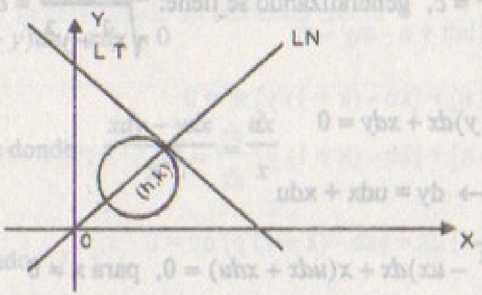
$Q = \int_0^x ydx = a^2 Ln\frac{y}{a}$; derivando se tiene: $y = a^2\frac{\frac{dy/dx}{a}}{y/a} \rightarrow y = \frac{a^3}{ay}.\frac{dy}{dx}$

entonces: $dx - \frac{a^2}{y^2}dy = 0$, integrando se tiene: $x + \frac{a^2}{y} = c \rightarrow \frac{a^2}{y} = c - x$

de donde $y = \frac{a^2}{c-x}$ (hipérbolas)

6. Demostrar que la curva, que posee la propiedad de que todas sus normales pasan por un punto constante es una circunferencia.

Solución



Sin perdida de generalidad podemos asumir que $c(h,k) = c\ (0,0)$.

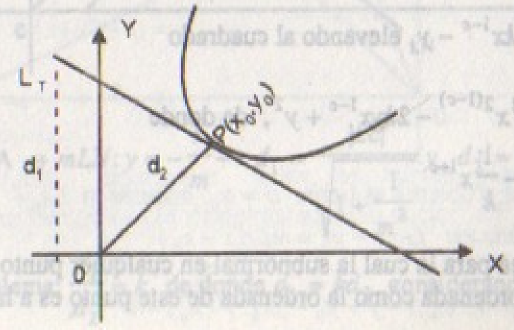
Sea $LN: y = bx$, donde m L N, además $mLt = \frac{dy}{dx}$ y como $LN \perp LT$, entonces:

$mLN = -\frac{1}{mLt} = -\frac{dx}{dy}$ es decir que $b = -\frac{dx}{dy}$,

como $y = bx \rightarrow b = \frac{y}{x}$ de donde $\frac{y}{x} = -\frac{dx}{dy} \rightarrow ydx + xdx = 0$ integrando $x^2+y^2 = R$

7. Hallar la curva para la cual, la razón del segmento interceptado por la tangente en el eje OY, al radio vector es una cantidad constante positiva.

Solución



Por dato se tiene: $\frac{d_1}{d_2} = c$ La ecuación de la recta tangente es:

$L_t: y - y_0 = m(x - x_0)$, de donde $L_t: y = y'(x_0)x - y'(x_0)x_0 + y_0$

para $x = 0$ se tiene $d_1 = y_0 - y'(x_0)x_0$ además $d_2 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, luego :

$\frac{y_0 - y'(x_0)x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = c$, generalizando se tiene: $\frac{y - y'x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c \to y - xy' = c\sqrt{x^2 + y^2}$

$$(c\sqrt{x^2 + y^2} - y)dx + xdy = 0$$

Sea $y = ux \to dy = udx + xdu$

$(c\sqrt{x^2 + u^2x^2} - ux)dx + x(udx + xdu) = 0$, para $x \neq 0$

$$(c\sqrt{1 + u^2} - u)dx + udx + xdu = 0$$

$c\sqrt{1 + u^2}\,dx + xdu = 0$, separando las variables.

$c\frac{dx}{x} + \frac{du}{1 + u^2} = 0$ integrando

$$cLn(x) + Ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = Lnk$$

$$Lnx^c(u + \sqrt{1 + u^2}) = Lnk$$

$x^c(u + \sqrt{1 + u^2}) = k$, de donde : $x^c(y/x + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x}}) = k$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = kx^{1-c}$$

$\sqrt{x^2 + y^2} = kx^{1-c} - y$, elevando al cuadrado

$x^2 + y^2 = k^2x^{2(1-c)} - 2kyx^{1-c} + y^2$, de donde

$$y = \frac{1}{2}kx^{1-c} - \frac{1}{k}x^{1+c}$$

8. Hallar la línea para la cual la subnormal en cualquier punto sea a la suma de la abscisa y la ordenada cómo la ordenada de este punto es a la abscisa.

Solución

Sea P (x,y) un punto cualquiera de la línea.

La subnormal en el punto P(x,y) es $y\frac{dy}{dx}$

Luego de acuerdo a las condiciones del problema se tiene:

$$x\frac{dy}{dx} = x + y \to (x + y)dx - xdy = 0$$

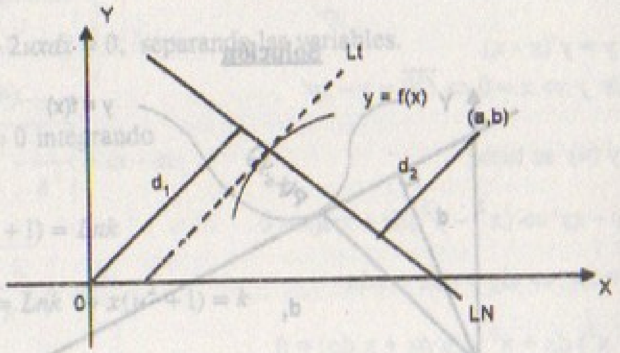
xdy - ydx = xdx de donde $\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{dx}{x}$

$d(\frac{y}{x}) = \frac{dx}{x}$ integrando

$$\frac{y}{x} = Ln(xc) \to y = xLn(xc)$$

9. Hallar la línea para la cual la distancia que media entre la normal en cualquier punto suyo el origen de coordenadas y la que media entre la misma normal y el punto (a,b) están en razón constante e igual a k.

Solución



Sea L t: y = mx + A $\to mLN: y = -\frac{x}{m} + c$ $d_1 = \frac{|\pm c|}{\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}}$ y $d_2 = \frac{|b + a/m - c|}{\sqrt{1 + 1/m^2}}$

condición del problema: $\frac{d_1}{d_2} = k$ de donde $d_1 = kd_2$ considerando c positivo se tiene: $\frac{c}{\sqrt{1+1/m^2}} = k\frac{(b+a/m-c)}{\sqrt{1+1/m^2}} \to$

$c = k(b+a/m-c)$ como $y = -\frac{x}{m}+c \to c = y+\frac{x}{m}$

Luego: $y+\frac{x}{m} = k(b+a/m-y-x/m)$

my + x = k (bm + a - my - x)

[ak - (k + 1) x] + [kb - (k + 1) y] m = 0

[ak - (k + 1) x] + [kb - (k + 1) y] $\frac{dy}{dx} = 0$

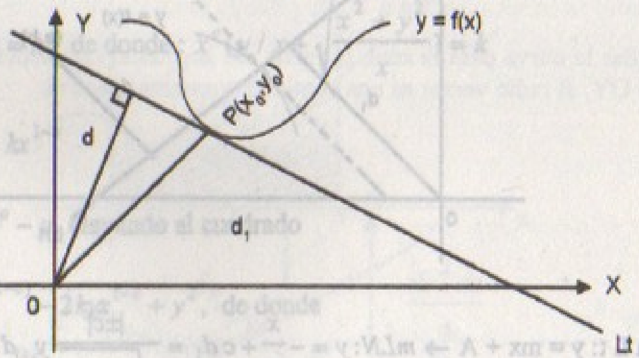
[ak - (k + 1) x] dx + [kb - (k + 1) y] dy = 0

integrando: $akx - \frac{k+1}{2}x^2 + kby - \frac{k+1}{2}y^2 = c_1$

$$x^2+y^2-\frac{2k}{k+1}(ax+by) = c$$

10. Hallar la curva que posee la propiedad de que la magnitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente sea igual a la abscisa del punto de contacto.

Solución



Por dato del problema se tiene: $d = x_0$ además $m\,Lt|_p = y'(x_0)$, y la ecuación de la recta tangente es: $Lt: y - y_0 = mLt(x - x_0)$

Es decir: $Lt: xy'(x_0) - y + y_0 - yx_0 \cdot y'(x_0) = 0$

$d(0, Lt) = \frac{|y_0 - x_0 y'(x_0)|}{\sqrt{[y'(x_0)]^2+1}}$, por condición del problema

se tiene: $d(0, Lt) = x_0$

$\frac{|y_0 - x_0 y'(x_0)|}{\sqrt{1+[y'(x_0)]^2}} = x_0$ generalizando en cualquier punto

$\frac{|y-xy'|}{\sqrt{1+(y')^2}} = x \to |y-xy'| = \sqrt{1+(y')^2}\,x$

$y^2 = 2xyy' + x^2y'^2 = x^2 + x^2y'^2$

$y^2 - x^2 - 2xyy' = 0 \to (y^2-x^2)dx - 2xydy = 0$

Sea y = ux → dy = udx + xdu

$(u^2x^2 - x^2)dx - 2x^2u(udx - xdu) = 0$ para $x \neq 0$

$(u^2-1)dx - 2u^2dx - 2uxdu = 0$

$-(u^2+1)dx - 2uxdx = 0$, separando las variables.

$\frac{dx}{x} + \frac{2udu}{u^2+1} = 0$ integrando

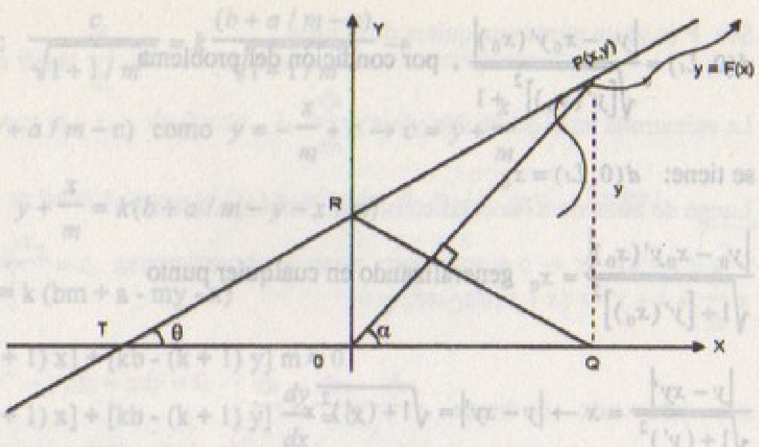
$Lnx + Ln(u^2+1) = Lnk$

$Lnx(u^2+1) = Lnk \to x(u^2+1) = k$

$x(y^2/x^2+1) = k \to x^2+y^2 = kx$

11.- Dada la figura adjunta, determinar todas las curvas para las cuales $\overline{PR}$ es tangente y al mismo tiempo es $\overline{QR}$ ortogonal al radio vector $\overline{OP}$

Solución



$$tg\theta = \frac{\overline{OR}}{\overline{TO}} = -\frac{\overline{OR}}{\overline{OT}} \Rightarrow Y' = -\frac{\overline{OR}}{\overline{OT}} \Rightarrow \overline{OT} = -\frac{\overline{OR}}{Y'} \quad \text{.........(1)}$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow RQ: y = -\frac{1}{tg\alpha}(x-x) = -\frac{x}{y}(x-x)$$

$$y = -\frac{y}{x}(x-x)$$

$$RQ \wedge \ eje\ y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{y} \Rightarrow \overline{OR} = \frac{x^2}{y} \quad \text{.........(2)}$$

de (1) y (2) se tiene: $\overline{OT} = -\dfrac{x^2}{yy'}$ ....(3)

T: $y - y = y'(x - x)$

$T \wedge \ eje\ y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \overline{OR} = y - xy'$ ....(4)

de (2) y (4) se tiene:

$$\frac{x^2}{y} = y - xy' \Rightarrow (x^2 - y^2)dx + xydy = 0$$

Sea $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$

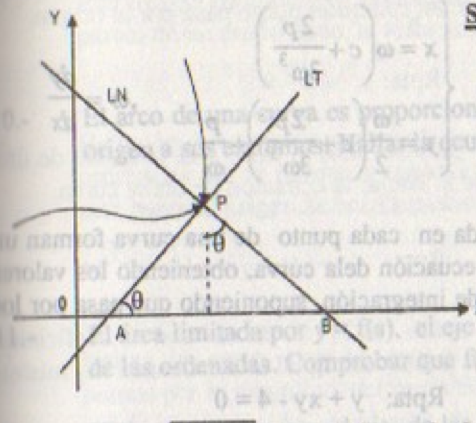
$$(x^2 - u^2x^2)\,dx + x^2 y\,(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(1-u^2)dx + u^2dx + xudu = 0 \Rightarrow dx + uxdu = 0$$

$\dfrac{dx}{x} + udu = 0$, integrando

$$Lnx + \frac{u^2}{2} = c \Rightarrow Lnx^2 + y^2/x^2 = k$$

12.- Calcular la curva para la cual la longitud de la porción de la normal comprendida entre la curva y el eje X es proporcional al cuadrado de la ordenada.



Solución

$\overline{PB}$ = segmento normal con longitud.

$$L = \left| yy'\sqrt{1+y'^{-2}} \right|$$

condición del problema $L = ky^2$ entonces

$$(yy'\sqrt{1+y'^{-2}})^2 = k^2y^4 \Rightarrow y^2y'^2 + y^2 = k^2y^4$$

$$y'^2 - 1 = k^2y^2 \Rightarrow y' = \sqrt{k^2y^2 - 1}$$

$\dfrac{dy}{\sqrt{k^2y^2-1}} = dx$ integrando $\dfrac{1}{k} Ln\left|ky + \sqrt{k^2y^2-1}\right| = x + c$

$$\frac{1}{k} Ln\left| y + \sqrt{y^2 - \frac{1}{k^2}} \right| = x + c_1$$

$$Ln\left| y + \sqrt{y^2 - \frac{1}{k^2}} \right| = kx + kc_1$$

$$y + \sqrt{y^2 - \frac{1}{k^2}} = Ae^{kx}$$

b. **Problemas Propuestos.-**

1.- La normal en el punto p(x.y) de una curva corta el eje de las x en M y al eje de las y en N. Hallar la ecuación de las curvas para las cuales p es el punto medio de MN.

Rpta: $y^2 - x^2 = k$

2.- Determinar una curva tal que si por un punto M de ellas se traza la tangente $\overline{MA}$ a la parábola $y^2 = 2px$, la tangente $\overline{MT}$ a la curva buscada es paralela a OA.

$$\text{Rpta: } \begin{cases} x = \omega\left(c + \dfrac{2p}{3\omega^3}\right) \\ y = \dfrac{\omega}{2}\left(c + \dfrac{2p}{3\omega^3}\right) + \dfrac{p}{\omega} \end{cases} \quad ,\omega = \frac{dy}{dx}$$

3.- El eje de las x, la tangente y la ordenada en cada punto de una curva forman un triángulo de area constante k. Hallar la ecuación dela curva, obteniendo los valores correspondientes de k y de la constante de integración, suponiendo que pasa por los puntos (0,4) y (1,2).

Rpta: $y + xy - 4 = 0$

4.- Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1,2) y tal que la tangente en un punto cualquiera p y la recta que une este punto con el origen determinan el ángulo complementario con el eje de las x.

Rpta : $y^2 - x^2 = 3$

5.- La parte de la normal comprendida entre el punto p (x,y) de una curva y el eje de las x tiene una longitud constante k. Hallar la ecuación de la curva.

Rpta: $y^2 + (x-c)^2 = k^2$

6.- La normal en el punto p (x,y) de una curva corta al eje de las x en M y al eje de las y en N. Hallar la ecuación de las curvas, para las cuales N es el punto medio de PM.

Rpta: $y^2 + 2x^2 = k$

7.- Las normales en todo punto de una curva pasan por un punto fijo. Hallar la ecuación de la curva.

Rpta: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R$

8.- Hallar la ecuación de una curva, tal que el área comprendida entre la curva, el eje de las x, una ordenada fija y una ordenada variable, sea proporcional a la diferencia entre estas ordenadas.

Rpta: $y = Ae^{x/k}$

9.- El área del sector formado por un arco de una curva y los dos radios que van desde el origen a sus extremos, es proporcional a la diferencia de esos radios. Hallar la ecuación de la curva.

Rpta: $\ell(\theta + c) + 2k = 0$

10.- El arco de una curva es proporcional a la diferencia de los radios trazados desde el origen a sus extremos. Hallar la ecuación de la curva.

Rpta: $Ln(\ell) = \dfrac{\theta + c}{\sqrt{k^2 + 1}}$

11.- El área limitada por y = f(s), el eje de las x, y dos ordenadas es igual al producto de las ordenadas. Comprobar que f(x) = 0 es la única solución.

12.- El área limitada por el eje de las x, una curva y dos ordenadas es igual al valor medio de las ordenadas multiplicado por la distancia entre ellas. Hallar la ecuación de la curva.

Rpta: $y - y_0 = c(x - x_0),\ y = y_0$

13.- Hallar la línea que pase por el punto (2,3) y cuya propiedad sea la siguiente: el segmento de cualquier tangente suya comprendido entre los ejes de coordenadas se divide en dos partes iguales en el punto de contacto.

Rpta: xy = 6

14.- Hallar la ecuación de una curva tal que la suma de los intersectos de la tangente en cualquier punto es una constante k.

Rpta: y = cx + kc

15.- La tangente a una curva en cualquier punto, forma con los ejes de coordenadas un triángulo de área 2k. Hallar la ecuación de tal curva.

Rpta: $y = cx \pm \dfrac{ck}{\sqrt{1+c^2}}$

16.- Por cada punto de una curva se trazan paralelos a los ejes para formar un rectángulo con dos lados sobre los ejes. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que cada rectángulo de esta clase queda en dos partes cuyas áreas son el doble una de la otra.

Rpta: $y^2 = cx$ ó $x^2 = cy$

17.- Hallar la ecuación de la curva cuya normal en cualquier punto pasa por el origen.

Rpta: $x^2 + y^2 = c^2$

18.- Si el producto de las distancias de los puntos (-a,0) y (a,0) a la tangente de una curva en cualquier punto en una constante k. Hallar la ecuación de dicha curva.

Rpta: $y = cx \pm \sqrt{k + (k + a^2)c^2}$

19.- Hallar una curva que pasa por el punto (0,-2) de modo que el coeficiente angular de la tangente en cualquier de sus puntos sea igual a la ordenada del mismo punto, aumentada tres veces.

Rpta: $y = -2e^{3x}$

20.- Hallar la línea que pase por el punto (2,0) y cuya propiedad sea la siguiente: el segmento de la tangente entre el punto de contacto y el eje de ordenadas tiene la longitud constante e igual a dos.

Rpta: $y = \sqrt{4 - x^2} + 2\,Ln\left|\dfrac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x}\right|$

21.- Hallar la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es n veces mayor que la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordenadas.

Rpta: $y = kx^n$

22.- Hallar todas las lineas para las cuales el segmento de la tangente comprendida entre el punto de contacto y el eje de las abscisas se divide en dos partes iguales en el punto de intersección con el eje de ordenadas.

Rpta: parábolas $y^2 = cx$

23.- Encontrar las curvas cuyas subnormales son constantes.

Rpta: $y^2 = 2kx + c$

24.- Hallar todas las líneas para las cuales la subtangencias sea proporcional a la abscisa del punto de contacto.

Rpta: $y^k = cx$

25.- Empleando coordenadas rectangulares, hallar la forma del espejo si los rayos que parten de un punto dado, al reflejarse, son paralelos a una dirección dada.

Rpta: $y^2 = 2cx + c^2$

26.- Hallar la curva para la cual la longitud del segmento interceptado en el eje de ordenadas por la normal a cualquiera de sus punto, es igual a la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

Rpta: $y = \dfrac{1}{2}\left(cx^2 - \dfrac{1}{c}\right)$

27.- Hallar la curva para la cual el producto de la abscisa de cualquiera de sus puntos por la magnitud del segmento interceptado en el eje O y por la normal, es igual al duplo del cuadrado de la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

Rpta: $x^2 + y^2 = cx^4$

28.- Hallar la línea que pase por el punto (a,1) y cuya subtangente tenga la longitud constante a.

Rpta: y = e(x - a) / a

29.- Hallar la línea para la cual la longitud de la normal sea la magnitud constante a.

Rpta: $(x - c)^2 + y^2 = a^2$

30.- Hallar la curva cuya tangente forma con los ejes coordenadas un triángulo de área constante $S = 2a^2$.

Rpta: $xy = \pm a^2$

31.- Hallar la línea para la cual la suma de las longitudes de la tangente y de la subtangente en cualquier punto suyo sea proporcional al producto de las coordenadas del punto de contacto.

Rpta: $y = \dfrac{1}{k}\,Ln\left|c(k^2x^2 - 1)\right|$

32.- Hallar la curva por la cual el segmento de la tangente comprendido entre los ejes coordenadas tiene una longitud constante a.

Rpta: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

33.- Encontrar la curva que pasa por el punto (1,2) cuya normal en cualquier punto (excepto en x = 0) se biseca por el eje x.

Rpta: $y^2 + 2x^2 = 6$

34.- Hallar una curva que pase por el punto (0,1) y que la subtangente sea igual a la suma de las coordenadas del punto de contacto.

Rpta: $y = e^{x/y}$

35.- En todo punto P en una curva, la proyección de la normal sobre el eje x y la abscisa de P son de longitud igual. Encontrar la curva que pasa por un punto (2,3).

Rpta: $y^2 - x^2 = 5$ ó $x^2 + y^2 = 13$

36.- Hallar la línea para la cual el cuadrado de la longitud de un segmento recortado por cualquier tangente del eje de ordenadas, sea igual al producto de las coordenadas del punto de contacto.

Rpta: $x = ce^{\pm 2\sqrt{x/y}}$

37.- Hallar la curva, sabiendo que la suma de los segmentos que intercepta la tangente a la misma en los ejes de coordenadas es constante e igual a 2a.

Rpta: $y = (\sqrt{2a} \pm \sqrt{x})^2$

38.- La suma de las longitudes de la normal, y de la subnormal es igual a la unidad. Hallar la ecuación de la curva, sabiendo que esta por el origen de coordenadas.

Rpta: $y^2 = 1 - e^{-x}$

39.- Encontrar la curva en el punto (0,2) tal que la proyección de la tangente sobre el eje x siempre tenga la longitud 2.

Rpta: $y^2 = 4e^{\pm x}$

40.- Hallar la curva, para la cual, ángulo formado por la tangente con el radio vector del punto de contacto es constante.

Rpta: $r = ce^{a\psi}$

41.- Hallar la línea por la cual la ordenada inicial de cualquier tangente es igual a la subnormal correspondiente.

Rpta: x = y Ln (cy)

42.- Encontrar la familia de curvas que tienen las siguientes propiedades: la perpendicular del origen a la tangente y abscisa de tangencia son de igual longitud.

Rpta: $x^2 + y^2 = cx$

43.- Encontrar la curva que pasa por el punto (2,1) tal que la intersección del eje x con la tangente es el doble de la ordenada del punto de tangencia.

Rpta: $y^2 = e^{2-(x/y)}$

44.- Hallar la curva, sabiendo, que el área comprendida entre los ejes de coordenadas, esta curva y la ordenada de cualquier punto situado en ella, es igual al cubo de esta ordenada.

Rpta: $3y^2 - 2x = k$

45.- Hallar la curva, para la cual, el segmento que intersecta la tangente en el eje Ox, es igual a la longitud de la propia tangente.

Rpta: $x^2 + (y-b)^2 = b^2$

46.- Hallar la línea para la cual la ordenada inicial de cualquier tangente sea dos unidades de escala menor que la abscisa del punto de contacto.

Rpta: y = cx - x Ln |x| - 2

47.- Hallar la curva, para la cual, el segmento de tangente, comprendido entre los ejes de coordenadas se divide en dos partes iguales por la parábola $y^2 = 2x$.

Rpta: $y^2 + 16x = 0$

48.- Encontrar las curvas para las cuales cada normal y sus intersección con x tiene la misma longitud.

Rpta: $x^2 + y^2 = cx$

49.- Hallar las curvas en el plano xy para las cuales, el segmento de cada tangente, comprendido entre los ejes de coordenadas, es bisecado por el punto de tangencia.

Rpta: xy = c

50.- Hallar las curvas en el plano xy para las cuales, la pendiente de las normales en todos sus puntos es igual a la razón de la abscisa a la ordenada.

Rpta: $xy = c$

51.- Hallar la línea para la cual la longitud de su normal sea proporcional el cuadrado de la ordenada. El coeficiente de proporcionalidad es igual a k.

Rpta: $y = \frac{1}{2k}\left[e^{kx+c} + e^{-(kx+c)}\right]$

52.- Hallar la curva, para la cual, la normal a cualquiera de sus puntos es igual a la distancia desde este punto hasta el origen de coordenadas.

Rpta: $y^2 - x^2 = c$ ó $x^2 + y^2 = c$

53.- Hallar la línea para la cual el área comprendida entre el eje de abscisa, la misma línea y dos ordenadas una de las cuales es constante y la otra variable, sea igual a la relación del cubo de la ordenada variable a la abscisa variable.

Rpta: $(2y^2 - x^2)^3 = cx^2$

54.- Hallar la ecuación de las curvas que corta al eje de abscisas en x = 1 y que tiene la siguiente propiedad: la longitud de la subnormal en cada punto de la curva es igual al promedio aritmético de las coodenadas en este punto.

Rpta: $(x + 2y)(x - y)^3 = 1$

55.- Una curva que se halla en el primer cuadrante pasa por el punto A(0,1), si la longitud del arco comprendido entre A(0,1) y un punto de la curva p(x,y) es numéricamente igual al área limitada por la curva, el eje x, el eje y y la coordenada del punto p(x,y). Encontrar la ecuación de la curva.

Rpta: $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

56.- La normal en cada punto de una curva y la recta que un dicho punto con el origen de coordenadas forma un triángulo isósceles cuya base está en el eje de abscisas. Hallar la ecuación de la curva.

Rpta: $x^2 - y^2 = c$

57.- Hallar la ecuación de la familia de curvas en el plano xy de tal manera que el triángulo formado por la recta tangente a la curva, al eje de las abscisa y la recta vertical que pasa por el punto de tangencia siempre tiene una área igual a la suma de los cuadrados de las coordenadas del punto de tangencia.

Rpta: $Ln\ cy = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+4y}{\sqrt{15}x}\right)$

58.- Hallar la curva para lo cual el segmento de tangente comprendida entre los ejes coordenados se divide en partes iguales por la parábola $y^2 = 2x$.

Rpta: $y^2 + 16x = 0$

59.- Hallar la línea para la cual el área del rectángulo construido sobre la abscisa de cualquier punto y sobre la ordenada inicial de la tangente en ese punto es una magnitud constante e igual a (a^2).

Rpta: $y = \pm\frac{a^2}{2x} + xc$

60.- Encontrar la ecuación de una curva tal que si se traza una normal en un punto M cualquiera de ella encuentra al eje x en el punto P, y la línea que une los puntos medios de $\overline{MP}$ decribe una parábola de ecuación $y^2 = 36x$.

61.- Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1,0) y goza de la siguiente propiedad: "si por un punto cualquiera P de ella se traza la tangente geométrica y la normal respectiva, la tangente corta el eje y en T y la normal corta al eje x en N resulta TN perpendicular a, OP, siendo O el origen de coordenadas.

Rpta: $x^2 + y^2 = x$

62.- Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (2,1) y para la cual el área del triángulo que forma el eje x de abscisas, la tangente a la curva en cualquiera de los puntos y el radio vector de dicho punto, sea constante e igual a 4 unidades cuadradas.

Rpta: $x = \frac{4}{y} - 2y$

63.- Determinar la ecuación de una curva que pasa por (1,1) y tenga la siguiente propiedad: por un punto P de ella se traza la recta tangente y la recta normal de modo que la primera corta al eje de las y en el punto A y la segunda al eje de las x en el punto B, cumpliendose la siguiente condición $\overline{OA} = \overline{OB}$, donde O es el origen de coordenadas.

Rpta: $Ln(x^2 + y^2) + 2\operatorname{arctg} y/x = c$

64.- Supongamos que un halcón H, se encuentra en el punto (1,0) y divisa una paloma Q en el origen volando en dirección del eje y, con una velocidad V. el halcón vuela inmediatamente en dirección de la paloma con una velocidad w = 2V ¿Cuál es la trayectoria que debe seguir el halcón y en que punto alcanzaría a la paloma?

Rpta: $y=\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x}{a}\right)^{1/2}-(ax)^{1/2}+\frac{2a}{3}$ ecuación trayectoria (0,2a/3) es el punto pedido.

65.- Determinar la ecuación de la familia de curvas que gozan de la siguiente propiedad: El área del trapecio por lo ejes coordenados, la tangente en un punto cualquiera de la curva y la ordenada del punto de tangencia sea siempre igual a, b unidades cuadradas.

Rpta: $3(cx^3-xy)=2b$

66.- El triángulo formado por la tangente a la curva, el eje de las abscisas y la recta vertical que pasa por el punto de tangencia siempre tiene un área igual a la suma de los cuadrados de las coordenadas del punto de tangencia.

67.- El área del triángulo formado por la tangente a la curva, el eje de abscisas y la normal a la curva es igual a la mitad del valor de la abscisas de intersección de la recta tangente.

68.- La normal en cada punto de una curva y la recta que une dicho punto con el origen de coordenadas forma un triángulo isósceles cuya base está en el eje de abscisas. Hallar la ecuación de la curva.

69.- Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (3,5), que tiene la siguiente propiedad: "La normal en cualquiera de sus puntos y la recta que une el punto considerado con el origen de coordenadas forman un triángulo isósceles con base en el eje de abscisas".

Rpta: $y^2-x^2=16$

70.- Sea una curva C en que la tangente y la normal de la curva C en un punto P(x,y) corten al eje X en A y A_1 y al eje Y en B y B_1 respectivamente. Además considere el punto E (x,0) y θ el ángulo que forma AP con el eje X. Considere a los segmentos como distancias dirigidas.

Determine la ecuación de la curva si el área del triángulo PEA_1 es igual a una constante k.

Rpta: $y^3=6kx+c$

71.- Hallar la curva cuya propiedad consiste en que el producto del cuadrado de la distancia entre cualquiera de sus puntos y el origen de coordenadas por el segmento separado en el eje de las abscisa de ese punto.

Rpta: $y^4+2x^2y^2=c$

72.- Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto (2, 4) y es tal que: "La abscisa del centro de gravedad de la figura plana limitada por los ejes coordenados, la curva y por la ordenada de cualquiera de sus puntos, sea igual a ¾ de la abscisa de este punto".

Rpta: $y=x^2$

73.- Encontrar la ecuación de una curva tal que si se traza una normal en un punto M cualquiera de ella encuentra al eje X en el punto P, y la línea que une los puntos medios de $\overline{MP}$ describe una parábola de ecuación $y^2=ax$.

Rpta: $y^2=ax+a^2+c_1e^{x/a}$

74.- Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 3) para la cual: "La ordenada PN de cualquier punto P(x,y) corta a la recta 2x + y - 10 = 0 en un punto Q y si sobre PN tomemos un punto M tal que PM = NQ entonces la recta OM resulta paralela a la recta tangente a la curva en P".

Rpta: $y=2x\ln x+10-7x$

75.- Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (4, 8) y es tal que: "La tangente de la curva en un punto P(x, y) cualquiera de ella corta al eje X en un punto M equidistante del punto P y del punto A(0,4)".

Rpta: $\frac{x^2}{y}+\frac{16}{y}+y=c$

76.- Se da un punto sobre el eje y, M (0,b); se pide calcular la ecuación de una curva que goza de la siguiente propiedad:

"Si un punto P(x,y) cualquiera de la curva, se traza una tangente a la curva, esta corta al eje x en el punto R, que equidista de M y P, además la curva pasa por el punto (7,5).

Rpta: $x^2+y^2+b^2=y\left(\frac{74+b^2}{5}\right)$

77.- Hallar la ecuación de las curvas para las que el radio de curvatura proyectado sobre el eje X, es el doble de la abscisas. Haga el correspondiente gráfico.

Rpta: $y=\frac{1}{c_1^2}\sqrt{x(c_1-x)}+\frac{1}{c_1}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{c_1-x}}+c_2$

78.- Si $X(t) = \int_0^t (t-s)e^{-(t-s)} e^s ds$. Calcular el valor de:

$$X''(t) + 2X'(t) + X(t)$$

79.- Determinar la curva tal que:

a) Cuya subnormal es la media aritmetica de la abscisa y la ordenada del punto de esta curva.

Rpta: $(y - x)^2 (x + 2y) = c$

b) Cuya subtangente es la media aritmetica de la abscisa y la ordenada del punto de esta curva.

Rpta: $(y - x)^2 = ky$

80.- Hallar la curva para la cual el segmento de tangente comprendida entre los ejes coordenadas se divide en partes iguales por la parábola $y^2 = 2x$.

Rpta: $y^2 + 16x = 0$

81.-

a) Graficar y hallar la ecuación diferencial de las curvas tales que la tangente en un punto cualesquiera M forme un angulo θ con el eje OX y que se verifique $\theta - \phi = \pi/4$, siendo ϕ el ángulo que Om forme con OX.

b) Resolver la ecuación diferencial hallada en (a).

c) Hallar, partiendo de la ecuación diferencial, la relación entre el radio de curvatura en M y OM.

82.- Sea Q el punto de corte de la tangente a una curva en P(x,y) y el eje y. Si la circunferencia cuyo diametro es $\overline{QP}$ pasa por un punto fijo F(a,0). Hallar la ecuación y resolver. Graficar.

83.- La normal en un punto P de una curva encuentra al eje X en Q. Encontrar la ecuación de la curva si pasa por el punto (0,b) y si el lugar geométrico del punto medio de $\overline{PQ}$ es $y^2 = kx$.

84.- Sea A el punto de corte de la tangente a una curva en P(x,y) y el eje Y, si la circunferencia cuyo diametro es $\overline{AP}$, pasa por un punto fijo (a,0). Hallar la ecuación de la curva.

1.2.- Trayectorias Ortogonales.

Consideremos una familia de curvas planas.

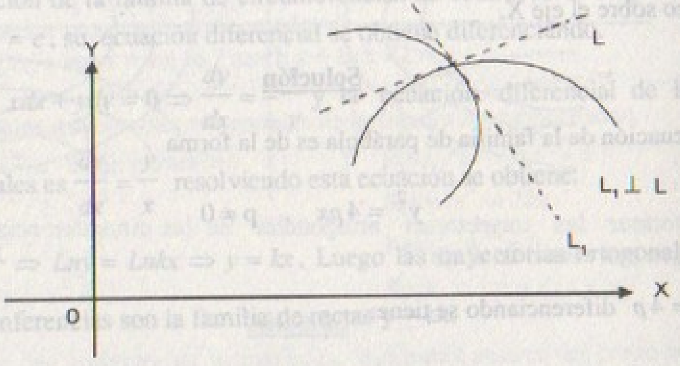
$$f(x,y,c) = 0 \quad ....(1)$$

donde cada valor del parámetro c representa una curva.

Los problemas que se presentan en los campos tales como Electrostática, Hidrodinámica y termodinámica es de encontrar una familia de curvas que dependen de un parámetro k.

$$g(x,y,k) = 0 \quad ....(2)$$

Con la propiedad que cualquier curva de (1) al interceptar a cada curva de la familia (2) las rectas tangentes a las curvas sean perpendiculares.



a las familias de las curvas (1) y (2) se denominan trayectorias ortogonales.

Observación. Como ejemplo veremos los casos siguientes:

1) En el campo Electrostático, a una familia de curvas se denomina curvas Equipotenciales y la otra familia de curvas denominan líneas de fuerza.

2) En el campo Hidrodinámico, a una familia de curvas se denomina curvas de potencial de velocidad y otra familia se denomina líneas de corriente o líneas de flujo.

3) En el campo Termodinámico a una familia de curvas se denomina líneas isotermas y a la otra familia de curvas denomina líneas de flujo de calor. Si se tiene la familia de curvas (1), para encontrar la familia de curvas (2), primero se encuentra la ecuación diferencial de la familia dada en (1) y depejamos y´ obteniendo.

$$y' = F(x, y) \quad \ldots(3)$$

Como la pendiente de las trayectorias ortogonales debe ser la inversa negativa de la pendiente (3) es decir:

$$y' = -\frac{1}{F(x,y)} \quad \ldots(4)$$

Luego las trayectorias ortogonales de la familia dada se obtiene resolviendo la ecuación diferencial (4).

a. Ejemplos

1.- Encontrar las trayectorias ortogonales de todas las parábolas con vértice en el origen y foco sobre el eje X.

Solución

La ecuación de la familia de parábola es de la forma

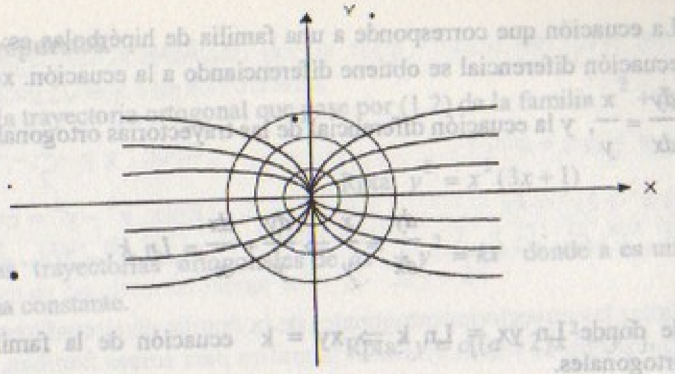
$$y^2 = 4px \quad , \quad p \neq 0$$

$\frac{y^2}{x} = 4p$ diferenciando se tiene:

$$\frac{2xydy - y^2dx}{x^2} = 0 \Rightarrow 2xdy - ydx = 0$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$ y la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales son: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$ de donde

2xdx + ydy = 0 resolviendo esta ecuación diferencial se obtiene $x^2 + \frac{y^2}{2} = c$, $c \neq 0$ luego las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas son las elipses de centro en el origen.



2.- Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias de centro en el origen de coordenadas.

Solución

La ecuación de la familia de circunferencias de centro en el origen es de la forma: $x^2 + y^2 = c$, su ecuación diferencial se obtiene diferenciando.

se tiene $xdx + ydy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ y la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ resolviendo esta ecuación se obtiene:

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow Lny = Lnkx \Rightarrow y = kx$. Luego las trayectorias ortogonales a la familia de circunferencias son la familia de rectas y = kx.

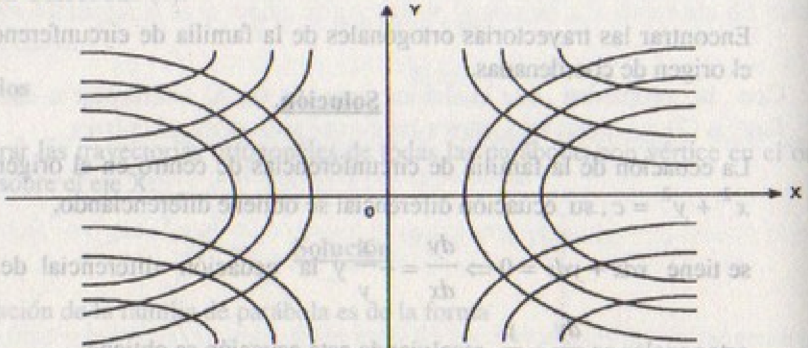
3.- Encontrar las trayectorias ortogonales de todas las hipérbolas equiláteras de centro en el origen de coordenadas.

Solución

La ecuación que corresponde a una familia de hipérbolas es: $x^2 - y^2 = c$, c ≠ 0, su ecuación diferencial se obtiene diferenciando a la ecuación. xdx - ydy = 0 de donde $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$, y la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = Ln\ k,$$

de donde Ln yx = Ln k ⇒ xy = k ecuación de la familia de las trayectorias ortogonales.



4.- Encontrar las trayectorias ortogonales de las circunferencias que pasan por el origen con centro en el eje X.

Solución

La ecuación que corresponde a esta familia de circunferencias es: $x^2 + y^2 = cx$, su ecuación diferencial se obtiene diferenciando a la ecuación

$$2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$ y la ecuación diferencial de las trayectorias

ortogonales es: $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$ resolviendo esta ecuación

$$2xydx - x^2dy = -y^2dy \Rightarrow \frac{2xydx - x^2dy}{y^2} = -dy \Rightarrow d\left(\frac{x^2}{y}\right) = -dy$$ integrando se tiene

$$\frac{x^2}{y} = -y + k \Rightarrow x^2 + y^2 = ky$$ ecuación que corresponde a las trayectorias ortogonales que son circunferencias con centro en el eje Y.

b. Ejercicios Propuestos.

1.- Encuéntrese la trayectoria ortogonal que pase por (1,2) de la familia $x^2 + 3y^2 = cy$

Rpta: $y^2 = x^2(3x + 1)$

2.- Encontrar las trayectorias ortogonales de $ax^2 + y^2 = kx$ donde a es un parámetro fija y k es una constante.

Rpta: $y = c[(a-2)x^2 - y^2]$, $a \neq 2$

$ye^{x^2/y^2} = c$ para a = 2

3.- Encontrar las trayectorias ortogonales de cos y - acoshx = k senhx, donde a es una constante fija y k es un parámetro.

4.- Probar que las trayectorias ortogonales de
y = Ln |tg (x + sen x + k)| es 2 sen h x + tg x / 2 = c

5.- Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dadas.

a) $y = ax^n$, a es un parámetro — Rpta: $x^2 + ny^2 = k$
b) $x^2 + y^2 / 2 = a^2$ — Rpta: $y^2 = 2bx$
c) $x^2 - y^2 / 3 = a^2$ — Rpta: $xy^3 = b$
d) $x^2 - xy + y^2 = c$ — Rpta: $x - y = k(x + y)^3$

6.- Encontrar las trayectorias ortogonales, que pasan através del punto especificado, de cada una de las siguientes familias de curvas.

a) $y^2 = kx, (-2,3)$ — Rpta: $2x^2 + y^2 = 17$
b) $y^2 = x^2 + ky, (1,-2)$ — Rpta: $x^3 + 3xy^2 = 13$
c) $y^2 = 2x + 1 + ke^{2x}, (o,e)$ — Rpta: $x = y^2[1 - Lny]$

7.- Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de elipses con centro en (0,0) y dos vértices en (1,0) y (-1,0)

Rpta: $x^2 + y^2 = 2Ln(kx)$

8.- Encontrar las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas.

a) $(x-1)^2 + y^2 + kx = 0$ — Rpta: $x^2 + y^2 - 1 = cy$
b) $x^2 = y^2 + ky^3$ — Rpta: $3x^2 + y^2 = cx$
c) $y^2 = cx^3$ — Rpta: $2x^2 + 3y^2 = k^2$

d) $e^x + e^{-y} = c$ Rpta: $e^y - e^{-x} = k$

e) $y = ce^{-x}$ Rpta: $y = \sqrt{2x + k}$

f) $y = \operatorname{tg} x + c$ Rpta: $y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{4} + k$

g) $x^2 + 3y^2 = ky$ Rpta: $y^2 - x^2 = cx^3$

h) $y = k(\sec x + \operatorname{tg} x)$ Rpta: $y^2 = 2(c - \operatorname{sen} x)$

9.- Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias que pasan por los puntos P(0,-3) y Q (0,0). Hacer la gráfica para ambas familias.

Rpta: $\dfrac{x^2}{2y+3} + y - 3Ln|2y+3| = c$

10.- Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = x\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(y+k)$

Rpta: $x^2 + y^2 = ce^x$

11.- Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $P^2 = k(P\operatorname{sen}\theta - 1)$

12.- Encontrar la ecuación de la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $r = 4a\cos\theta\ \operatorname{tg}\theta$

Rpta: $r^2 = \dfrac{b^2}{\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta}$

13.- La temperatura de una placa delgada está dada por $T(x,y) = e^{-y}\cos x$. Encontrar la ecuación de las líneas de flujo de calor.

Rpta: y = Ln |sen x| + k

14.- Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de circunferencia que pasan por los puntos (0,0) y (2,0).

Rpta: $x^2 + y^2 + k(1 - x) = 0$

15.- Hallar la ecuación de la familia de trayectoria ortogonales a todas las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y cuyo centro está en la recta y = x.

Rpta: $x^2 + y^2 = (y - x)k$

16.- Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas que satisface la siguiente propiedad; la recta tangente a las curvas en cualquier punto P, es la

bisectriz del ángulo determinado por la recta vertical que pasa por P y la recta que une P con el origen de coordenadas.

Rpta: $y = \dfrac{x^2 c}{2} + c$

17.- Hallar el valor de "m" de modo que $x^m + y^m + 25 = kx$ sea las trayectorias ortogonales de las circunferencias $x^2 + y^2 - 2cy = 25$

Rpta: m = 2

18.- Una familia de curvas goza de la siguiente propiedad: si por un punto cualquiera P(x,y), de cualquiera de las curvas que componen la familia, se traza la recta normal, el segmento de normal comprendido entre los ejes coordenados tiene una longitud constante de 4 unidades de longitud; se pide hallar la ecuación de la curva, que pasa por el punto (4,0) y es ortogonal a la familia de curva que se menciona.

19.- Hallar la ecuación de la familia de trayectoria ortogonal a la familia de curvas, que cumple la propiedad "si por un punto cualquiera de las curvas de la familia, se trazan la recta tangente y normal a la curva, el área del triangulo formado por las rectas tangente y normal con el eje y es igual a $kx^2/2$ donde k es la ordenada del punto, en que la tangente intercepta al eje y.

20.- Demostrar que la familia de trayectorias de la familia $(x - y)(2x + y)^2 = kx^6$ con una rotación de 90° en el origen está dado por $(x + y)(x - 2y)^2 = cy^6$.

21.- Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto P(2,1) y para la cual el área del triángulo que forman el eje X, la tangente a la curva en cualquiera de sus puntos y el radio vector de dicho punto es una constante e igual a $k\,u^2$.

22.- Determinar una curva tal que si por un punto M de ella se traza la tangente $\overline{MA}$ a la parábola $y^2 = 2px$, la tangente a la curva buscada es paralela a $\overline{CA}$.

23.- Determinar una curva tal que si por un punto M de ella se traza la tangente $\overline{MA}$ a la parábola $y^2 = 2px$, la tangente $\overline{MT}$ a la curva buscada es paralela a $\overline{OA}$.

24.- Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas definida por $(x - 1)^2 + y^2 + kx = 0$

25.- Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia $y = x\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(y+k)$

26.- Hallar la curva que pasa por el punto (1,1) y corta a las parábolas semicúbicas $y^2 = kx^3$

27.- Encontrar las trayectorias ortogonales de $y = \ln tg(x + senx + k)$

28.- Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de circunsferencia que pasan por el origen y con centro en el eje y.

29.- Hallar las trayectorias de todas las circunsferencias que pasan por el origen y cuyos centros están sobre la recta y = x.

30.- Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas que satisfacen la siguiente propiedad: "La recta tangente a una de la curva en un punto cualquiera P, es la bisectriz del ángulo determinado por la recta vertical que pasa por P y la recta que une P con el origen de coordenadas".

31.- Hallar la ecuación de las trayectorias ortogonales de la familia de curvas que satisfacen la propiedad: "Si por un punto cualquiera P(x,y) de una de las curvas se trazan la recta tangente y la recta normal a ella, entonces el área del triángulo formado por la recta tangente, el eje x, y la recta normal es siempre igual a $-\frac{y}{y'}$".

32.- Una familia de curvas goza de la siguiente propiedad: "Si por un punto cualquiera P(x,y), de cualquiera de las curvas que componen la familia, se traza la recta normal, el segmento de normas comprendido entre los ejes coordenados tiene una longitud e igual a 6 unidades". Se pide hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (6,0) y es ortogonal a la familia de curvas que se menciona.

3.3.- Cambio de Temperatura.

La ley de enfriamiento de Newton establece, que la rapidez de cambio de temperatura de un cuerpo en cualquier tiempo t, es proporcional a la diferencia de las temperaturas del cuerpo y del medio circundante en el tiempo t. Consideremos a T la temperatura del cuerpo en el tiempo t y a Tm la temperatura del medio circundante y a T_0 temperatura inicial del cuerpo (t = 0).

Como la variación de la temperatura puede ser que aumente o disminuya.
Luego de acuerdo a la Ley de enfriamiento de Newton se expresa mediante la ecuación diferencial.

$\frac{dT}{dt} = k(T - Tm)$ ó $\frac{dT}{dt} = -K(T - Tm)$ ya sea que aumente o disminuya, donde k es el factor de proporcionalidad.

Si $\frac{dT}{dt} = -k(T - Tm) \Rightarrow \frac{dT}{dt} + KT = kTm$ que es una ecuación diferencial lineal de primer orden y su solución es:

$T = e^{-kt}\left[\int e^{kt}.kTmdt + c\right]$ de donde $T = Tm + Ae^{-kt}$

además se debe cumplir que para $t = 0$, $T = T_0$

Luego $T = Tm + (T_0 - Tm)e^{-kt}$

3.4.- Descomposición, Crecimiento y Reacciones Químicas.

La rapidez de descomposición de una sustancia radiactiva en un tiempo particular t es proporcional a la cantidad presente en ese tiempo.

La rapidez de crecimiento del número de bacterias en una solucion es proporcional al número de bacterias presente. Si S representa la masa de una sustancia radiactiva presente en el tiempo t, o el número de bacterias presente en una solución en el tiempo t, entonces la Ley de descomposición y de crecimiento, esta expresado por $\frac{dS}{dt} = -KS$ para la descomposición y $\frac{dS}{dt} = KS$ para el crecimiento, en donde K es un factor de proporcionalidad.

Como $\frac{dS}{dt} = KS$, las variables s y t son separables.

Luego: $\frac{dS}{s} = kdt$, integando

$Ln(s) = kt + c \rightarrow S = Ae^{kt}$ que es la solución general. Si S_0 representa a la cantidad inicial es decir: $S = S_0$, cuando t = 0, $S_0 = A$

Problemas Resueltos

1.- Según la Ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia en la temperatura T del cuerpo y la temperatura Tm del aire. Si la temperatura del aire es de 20°C y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100°C a 60°C ¿En cuanto tiempo su temperatura descenderá hasta 30°C?

Solución

Sean T = temperatura del cuerpo

Tm = Temperatura del aire = 20°C

T_0 = Temperatura inicial

La descripción matemática es: $\frac{dT}{dt} = -k(T - Tm)$

y la solución de acuerdo a lo descrito es: $T = Tm + (T_0 - Tm)e^{kt}$

para t = 20°, T = T_0 = 60C Entonces:

$60=20+(100-20)e^{-20k}$

$40 = 80e^{20K} \Rightarrow K = +\frac{Ln2}{20}$

por lo tanto $T = 20 + 80e^{(\frac{Ln2}{20})t}$

$$T = 20 + 80e^{Ln2^{\ t/20}}$$
$$T = 20 + 80.2^{\ t/20}$$

para t = ? $T = 30°C$

$$30 = 20 + 80.2^{-t/20}$$

$\frac{1}{8} = 2^{-t/20}$ $2^{-3} = 2^{-t/20}$ $t = 60'$

2. Determinar el camino S recorrido por un cuerpo durante el tiempo t. Si su velocidad es proporcional al trayecto, sabiendo que en 10 seg. el cuerpo recorre 100 mts. y en 15 segs. 200 mts.

Solución

Sean S = el camino recorrido

t = tiempo en segundos

$V= \frac{ds}{dt}$ = velocidad del cuerpo

La descripción matemática es: $\frac{ds}{dt} = ks$

La solución de la ecuación diferencial es:

S = Ae^{kt}, para t = 10 seg. S = 100 mts.

$$100 = Ae^{10k} \rightarrow A = \frac{100}{10K}........(1)$$

para t = 15 seg. S = 200 mts.

$$200 = Ae^{15k} \rightarrow A = \frac{200}{e^{15k}}........(2)$$

igualando (1) y (2) se tiene: $K = \frac{Ln(2)}{5}$

reemplazando en (1) o en (2) se tiene: A = 25.

Luego el camino recorrido es: S = $25.2^{t/5}$

3. Cierta cantidad de una sustancia indisoluble que contiene en sus poros 2 Kgr. de sal se somete a la acción de 30 litros de agua. Después de 5 minutos se disuelve 1 Kgr. de sal. Dentro de cuanto tiempo se disolverá el 99% de la cantidad inicial de sal?

Solución

Sea S = cantidad de sal por disolverse

La descripción matemática es:

$\frac{ds}{dt} = ks$, k factor de proporcionalidad

La solución de la ecuación diferencial es:

s = Ae^{kt}, determinaremos A.

para $t = 0$, $s = 2$ kgr. $\rightarrow A = 2$

Luego $s = 2e^{kt}$, determinaremos k

para $t = 5$ min. $s = 1$ kgr. $\rightarrow k = \frac{1}{5}Ln(\frac{1}{2})$

por lo tanto $s = 2e^{\frac{t}{5}Ln(1/2)} \rightarrow S = 2(\frac{1}{2})^{t/5}$

para determinar t, se tiene que buscar el 99% de s es decir:

$$s = 1.98 \text{ kgr.}$$

entonces: $1.98 = 2(\frac{1}{2})^{t/5} \rightarrow 0.99 = (\frac{1}{2})^{t/5}$

Luego: $t = \dfrac{5Ln(0.99)}{Ln(\frac{1}{2})}\ min.$

4. Un termómetro que marca 18°F, se lleva a un cuarto cuya temperatura es de 70°F, un minuto después la lectura del termómetro es de 31°F. Determínese las temperaturas medidas como una función del tiempo y en particular encontrar la temperatura que marca el termómetro cinco minutos después que se lleva al cuarto.

Solución

Sean T = temperatura del cuerpo
Tm = temperatura del cuarto = 70°F

La descripción matemática es:

$\frac{dT}{dt} = K(T - Tm), k$ es el factor de proporcionalidad. La solución de la ecuación diferencial es:

$T = Tm + (t_0 - Tm)\, e^{kt}$ para determinar k se tiene:

$t = 1$ min., $T = 31°$, $Tm = 70°F$

Luego $31 = 70 + (18 - 70)e^k \rightarrow e^k = \frac{39}{52}$

de donde $k = Ln(\frac{39}{52}) = Ln(\frac{3}{4})$

por lo tanto: $T = 70 - 52\, e^{t\, Ln(3/4)}$

para $t = 5$ min. $T = ?$

$T = 70 - 52\,(3/4)^5 \approx 58°F$. $\therefore\ T \approx 58°F$

5. A la 1 p.m. un termómetro que marca 70°F, es trasladado al exterior donde el aire tiene una temperatura de - 10°F a las 1.02 p.m. la temperatura es de 26°F a las 1.05 p.m. el termómetro se lleva nuevamente adentro donde el aire está 70°F, ¿Cuál es la lectura del termómetro a las 1.09 p.m.?

Solución

Sean T = temperatura del cuerpo
Tm = temperatura del aire = -10°F

La descripción matemática es:

$\frac{dT}{dt} = K(T - Tm), k$ el factor de proporcionalidad

La solución de la ecuación diferencial es:

$T = Tm + Ac^{kt}$ para $t = 0$, $T = T_0$ se tiene:

$T = Tm + (T_0 - Tm)\, e^{kt}$ esto es a la 1p.m.

a la 1.02 p.m. $t = 2$, $t = 26°F$

$26 = -10 + 80e^{2k} \rightarrow k = \frac{1}{2}Ln(\frac{9}{20})$

Luego $T = -10 + 80\, e^{t/2\, Ln(9/80)}$

Es decir $T = -10 + 80\,(\frac{9}{20})^{t/2}$

a la 1.05 p.m., $t = 5$ min.

$$T = -10 + 80(\frac{9}{20})^{5/2} \rightarrow T = 0.88°\,F$$

6. Supongase que una reacción química se desarrolla con la ley de descomposición si la mitad de la sustancia A ha sido convertida al finalizar 10 seg. Encuéntrese en cuánto tiempo se transforma nueve décimos de la sustancia.

Solución

Sea x = cantidad de la sustancia A

La descripción matemática es: $\frac{dx}{dt} = -kx$

La solución de la ecuación diferencial es: $x = Be^{-kt}$, determinaremos B.

para $t = 0$, $x = x_0 \rightarrow B = x_0 \rightarrow x = x_0 e^{-kt}$

Determinaremos k, para esto se tiene: $t = 10$ seg. $x = x_0/2$. Entonces:

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-10k} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-10k} \rightarrow k = \frac{Ln(2)}{10}$$

Es decir, $x = x_0 e^{-t/10 \, Ln(2)}$, ahora para $t = ?$, $x = \frac{9x_0}{10}$

entonces: $\frac{9x_0}{10} = x_0 e^{-t/10 Ln(2)} \rightarrow \frac{9}{10} = 2^{-t/10}$

$$Ln\frac{9}{10} = -\frac{t}{10} Ln(2) \rightarrow t = -\frac{10 Ln(9/10)}{Ln(2)} \approx 33 seg.$$

Luego: $t = 33$ seg.

7. La conversión de una sustancia B sigue la Ley de descomposición. Si sólo una cuarta parte de la sustancia ha sido convertida después de diez segundos. Encuéntrese cuanto tardan en convertir 9/10 de la sustancia.

Solución

Sea x = cantidad de sustancia B.

Según los datos del problema se tiene:

x	x_0	¾ x_0	$x_0/10$
t	0	10	t

La descripción matemática es: $\frac{dx}{dt} = -kx$, k factor de proporcionalidad

La solución es:

$$\int_{\frac{x_0}{10}}^{\frac{3x_0}{4}} \frac{dx}{x} = -x_0 \int_0^{10} kdt \rightarrow k = -\frac{1}{10} Ln(3/4)$$

$$\int_{x_0}^{10} \frac{dx}{x} = -k \int_0^{10} dt \rightarrow t = \frac{10 Ln(1/10)}{Ln(3/4)} = 80 seg.$$

t = 80 seg.

8. Una cierta sustancia radiactiva tiene una vida media de 38 horas. Encontrar que tanto tiempo toma el 90% de la radiactividad para disiparse.

Solución

Sea x = cantidad de la sustancia radiactiva

Según los datos del problema se tiene:

x	x_0	$x_0/2$	$9x_0/10$
t	0	38	t

La descripción matemática es:

$\frac{dx}{dt} = -kx$, k factor de proporcionalidad

La solución es: $\int_{x_0}^{\frac{x_0}{2}} \frac{dx}{x} = -k \int_0^{38} dt \rightarrow k = \frac{Ln(2)}{38}$.

$$\int_{x_0}^{\frac{9x_0}{10}} \frac{dx}{x} = -\frac{Ln(2)}{38} \int_0^t dt \rightarrow t = \frac{38 Ln(9/10)}{Ln(2)}$$

t = 126 años

9. Una población bacteriana B se sabe que tiene una taza de crecimiento proporcional a B misma, si entre el medio dia y las 2 p.m. la población se triplica.

A que tiempo, si no se efectúa ningún control, B será 100 veces mayor que el medio dia?

Solución

Sea x = cantidad de la población bacteriana B.
Según datos del problema se tiene:

x	x_0	$3x_0$	$100x_0$
t	0	2	t

La descripción matemática es:

$\frac{dx}{dt} = kx$, k factor de proporcionalidad.

La solución de la ecuación es: $\int_{x_0}^{3x_0} \frac{dx}{x} = k\int_0^2 dt \to k = \frac{Ln(3)}{2}$

$$\int_{x_0}^{100x_0} \frac{dx}{x} = \frac{Ln(3)}{2}\int_0^t dt \to t = \frac{2\,Ln(100)}{Ln(3)} \approx 8.38hrs.$$

t = 8.38 horas.

10. Se sabe que un cierto material radiactivo decae a una velocidad proporcional a su cantidad de material presente. Un bloque de ese material tiene originalmente una masa de 100 gr. y cuando se le observa después de 20 años, su masa ha disminuido a 80 grs.

Encuentre una expresión para la masa de ese material como función del tiempo. Encuentre también la vida media del material.

Solución

Sea x (t) = cantidad de sustancia radiactiva en cualquier t la descripción matemática es:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -kx(t)$$

Resolviendo la ecuación se tiene: x (t) = Ae^{-kt} determinaremos la constante A, para esto se tiene:

Para t = 0, x (t) = 100 gr. $\to$ A = 100

Luego x (t) = 100 e^{-kt}

determinaremos la constante k, para esto se tiene:

para t = 20 años, x (20) = 80 entonces:

$80 = 100e^{-20k} \to k = \frac{1}{20} Ln(5/4)$

Luego $x(t) = 100ex\left[-\frac{t}{20} Ln(5/4)\right]$

11. Un isótopo radiactivo del carbono, conocido como carbono 14 obedece a la Ley del decaimiento radiactivo.

$\frac{dQ(t)}{dt} = KQ$, donde Q (t) denota la cantidad de carbono 14 presente en el tiempo t.

a. Determínese K, si la vida media del carbono 14 es de 5568 años.

b. Si Q_0 representa la cantidad de carbono 14, presente al tiempo t = 0. Encuentre una expresión para Q como función del tiempo.

c. En años recientes se ha hecho posible hacer medidas que conducen a conocer la razón $Q(t)/Q_0$ para algunos restos de maderas y plantas que contienen cantidades residuales de carbono 14. Los resultados de a, y b, pueden usarse entonces para determinar el tiempo pasado desde la muerte de estos restos, esto es, el período durante el cual ha tenido lugar el decaimiento. Encuentre una expresión para t en términos de Q, Q_0 y K. Encuéntrese el intervalo desde que principió el decaimiento, si el valor actual de Q/Q_0 es 0.20.

Solución

El carbono 14, obedece a la Ley de decaimiento radiactivo.

$\frac{dQ(t)}{dt} = KQ$ (t) y la solución de esta ecuación

es: Q (t) = ce^{kt} de donde para t = 0, Q (0) = Q_0

c = Q_0 Luego Q (t) = $Q_0 e^{kt}$

a. Determinaremos k, para esto se tiene que:

La vida media del carbono es 5,568 años es decir:

para t = 5,568 $Q(t) = \frac{Q_0}{2}$

entonces: $\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{5.568K}$

$$k = \frac{Ln(2)}{5,568} \approx -1.245x10^{-4}$$

$K = -1.245 + 10^{-4}$

b. Hallaremos Q como función del tiempo.

Q (t)	Q_0
t	0

de la parte (a), se tiene: $Q(t) = Q_0 e^{KT}$

ó $Q(t) = Q_0 e^{\frac{tLn(2)}{5,568}}$

$$Q(t) \approx Q_0^{-(1.245x10^{-4})t}$$

c. Hallaremos una expresión para t en términos de: Q, Q_0 y K

de la parte b) se tiene $Q = Q_0 e^{\frac{tLn(2)}{5,568}}$

$$Ln(Q) = Ln(Q_0) - \frac{t}{5,568} Ln(2)$$

$$\frac{tLn(2)}{5,568} = Ln\frac{Q_0}{Q} \to t = \frac{5,568}{Ln(2)} Ln(\frac{Q_0}{Q})$$

$$t = -\frac{5,568}{Ln(2)} Ln(\frac{Q}{Q_0}) = -\frac{5,568}{Ln(2)} Ln(0.20)$$

de donde $t = \frac{5,568}{Ln(2)} Ln(5) = 12,930$ años

"Isótopo.- Cuerpo que tiene igual número atómico y ocupa el mismo lugar que otro en la tabla periódica de los elementos, pero que se distinguen de aquel por la diferente constitución y peso de sus átomos".

12. Un cuerpo cuya temperatura es de 30°C requiere de 2 minutos, para descender su temperatura a 20°C, si es colocado en un medio refrigerante con temperatura constante de 10°C. Cuanto tiempo tardará el mismo cuerpo para bajar su temperatura de 40°C a 35°C, si ahora el medio está a la temperatura constante de 15°C?

Solución

Llamemos:

T = Temperatura del cuerpo en el instante t.
Tm = Temperatura del medio exterior (refrigerante)
T_0 = Temperatura inicial del cuerpo (t = 0)

Suponiendo que se cumpla la Ley de Newton, para el intercambio de temperaturas, entonces:

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - Tm)$$ donde K es el factor de proporcionalidad.

La solución para la ecuación diferencial es: $T = Tm + ce^{-KT}$

determinaremos c, para esto se tiene:

para t = 0, $T = T_0$ $C = T_0 - Tm$

por lo tanto: $T = Tm + (T_0 - Tm) e^{-KT}$

determinaremos K, para esto se tiene:

t = 2 min, T = 20°C, T_0 = 30°C, Tm = 10°C

de donde $T = Tm + (T_0 - Tm) e^{-KT}$

$20 = 10 + (30 - 10) e^{-2K}$

que al despejar k se tiene: $K \approx 0.348$

por lo tanto: $T = Tm + (T_0 - Tm)\, e^{-0.0348\,T}$

de donde al despejar t se tiene: $t \approx 0.64$ minutos.

13. Una sustancia radiactiva A se descompone dando lugar a una sustancia radiactiva B, la que a su vez se desintegra para dar un producto estable C, según el esquema siguiente:

$$A \quad \to \quad B \quad \to \quad C$$

En el instante $t = 0$, se tiene 10 mgrs. de A, mientras que B y C no se tiene cantidad alguna. La vida media (es decir el tiempo que debe transcurrir para que la cantidad original de sustancia se reduzca a la mitad) de A es de 2 horas, mientras que la de B es 1 hora, ¿Cuál es el valor de B y C después de 2 horas?

Solución

Llamemos m_1, m_2 y m_3 a las cantidades de sustancias radiactivas de A, B y C respectivamente en el instante t.

Entonces la ecuación diferencial que gobierna a: m_1 es:

$$\frac{dm_1}{dt} = -K_1 m_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

cuya solución es conocida: $m_1 = m_0 \cdot e^{-k_1 t} \ldots\ldots(2)$

siendo $K_1 = \dfrac{Ln(2)}{t}$ con T = 2 horas es la vida media y $m_{01} = 10$ mgrs. es la cantidad inicial de A. Para la sustancia B, la ecuación es:

$$\frac{dm_2}{dt} = -K_2 m_2 + K_1 m_1 \ldots\ldots(3)$$

y para la sustancia C es:

$$\frac{dm_3}{dt} = K_2 m_2 \ldots.(4)$$

estas ecuaciones se resuelven del modo siguiente: de (2) en (3) se tiene:

$$\frac{dm_2}{dt} + K_2 m_2 = K_1 m_{01} e^{-k_1 t}$$

y la solución de esta ecuación es: $m_2 = \dfrac{k_1 m_{01}}{k_2 - k_1} e^{-K_1 t} + c e^{-k_2 t}$, c constante de integración usando las condiciones iniciales de que en : $t = 0$, $m_2 = 0$

$$\to c = -\frac{k_1 m_{01}}{k_2 - k_1}$$

por lo tanto:

$$m_2 = \frac{k_1 m_{01}}{k_2 - k_1}[e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}] \ldots\ldots\ldots(5)$$

ahora de (5) en (4) se tiene:

$$\frac{dm_3}{dt} = \frac{k_2 k_1}{k_2 - k_1}[e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}]$$

integrando directamente, usando la condición inicial de que en $t = 0$, $m_3 = 0$ se tiene:

$$m_3 = m_{01}\left[1 - \frac{k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}}{k_2 - k_1}\right] \ldots(6)$$

finalmente podemos reemplazar valores númericos en:

(5) y (6) con $k_1 = \dfrac{Ln(2)}{\tau\ 1} = \dfrac{Ln(2)}{2}$ y $k_2 = \dfrac{Ln(2)}{\tau\ 2} = Ln(2)$ y $m_{01} = 10$ mgrs.

obteniendose: $m_2 = 2.5$ mgrs.
$m_3 = 2.5$ mgrs.

y también de (2), $m_1 = 5$ mgrs.

Ejercicios Propuestos

1. Supongamos que la razón a que se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del aire que lo rodea un

cuerpo originalmente a 120°F se enfría hasta 100°F en 10 minutos en aire a 60°F. Encontrar una expresión para la temperatura del cuerpo en un instante cualquiera t.

Rpta: $T = 60 + 60(2/3)^{t/10}\ \forall t$

2. Para una sustancia C, la velocidad de variación con el tiempo es proporcional al cuadrado de la cantidad X de sustancia no convertida. Sea k el valor numérico de la cantidad de sustancia no convertida en el tiempo t = 0. Determinar $X, \forall t \geq 0$

Rpta: $X = \dfrac{x_0}{1 + x_0 kt}\ \forall t \geq 0$

3. Un químico desea enfriar desde 80°C hasta 60°C una sustancia contenido en un matráz se coloca el dispositivo en un recipiente amplio por el que circula agua a 15°C. Se observa que después de 2 minutos la temperatura ha descendido a 70°C. Estimar el tiempo total de enfriamiento.

Rpta: t = 4.45 minutos.

4. Un termómetro que marca 75°F se lleva fuera donde la temperatura es de 20°F. Cuatro minutos después el termómetro marca 30°F. Encontrar:

a. La lectura del termómetro siete minutos después de que este ha sido llevado al exterior y,

b. El tiempo que le toma el termómetro caer desde 75°F hasta más o menos medio grado con respecto a la temperatura del aire.

Rpta: T = 23°, t = 11 minutos.

5. Dentro de cuanto tiempo la temperatura de un cuerpo calentado hasta 100°C descenderá hasta 30°C. Si la temperatura del local es de 20°C y durante los primeros 20 minutos el cuerpo en cuestión se enfría hasta 60°C.

Rpta: t = 60 minutos.

6. Si el 45% de una sustancia radiactiva se desintegra en 200 años. ¿Cuál es su vida media? En cuanto tiempo se desintegrará 60% de la cantidad original?.

Rpta: t = 319.4 años

7. Se tienen dos recipientes con soluciones a temperaturas constantes, la primera a 30°C y la segunda a 25°C un termómetro que marca la temperatura de la primera solución es puesto en contacto con la segunda, cuatro minutos después marca 27°C más adelante el termómetro es puesto nuevamente en contacto con la primera solución, 10 minutos después del comienzo del experimento el termómetro indica 28°C. ¿Cuándo fue llevado el termómetro del segundo al primer recipiente?

Rpta: t = 4.73 minutos.

8. Un cierto material radiactivo tiene una vida media de dos horas. Encuentre el intervalo de tiempo requerido para que una cantidad dada de este material decaiga hasta un décimo de su masa original.

Rpta: $t = \dfrac{2\,Ln(10)}{Ln(2)}$ horas

9. Suponer que una gota de lluvia esférico se evapora a una velocidad proporcional a su área superficial. Si originalmente el radio es de 3 mm., 1 hora después se ha reducido a 2 mm. Encontrar una expresión para el radio de la gota como función del tiempo.

Rpta: r = 3 - t mm, $0 \angle t \angle 3$

10. El azúcar se disuelve en el agua con una rapidez proporcional a la cantidad que queda sin diluir. Si 30 lbs. de azúcar se reduce a 10 lbs. en 4 horas. ¿En cuánto tiempo se habrá diluido el 95% del azúcar?

Rpta: $t = \dfrac{4\,Ln(20)}{Ln(3)}$

11. El radiactivo tiene una vida promedio de 5600 años aproximadamente. ¿En cuántos años desciende el 20% de su cantidad original? ¿Al 10%?

Rpta: $t = \dfrac{-5600\,Ln(0.20)}{Ln(2)}$

12. El radio se descompone con una velocidad proporcional a la cantidad de radio presente. Supóngase que se descubre que en 25 años aproximadamente 1.1% de una cierta cantidad de radio se ha descompuesto. Determínese aproximadamente que tanto tiempo tomará el radio para que se descomponga la mitad de la cantidad original.

Rpta: 1,566.7 años

13. Dos sustancias A y B se convierten en un sólo compuesto C, en el laboratorio se ha mostrado que para estas sustancias se cumple la siguiente ley de conversión.

La velocidad de variación con el tiempo de la cantidad x del compuesto C es proporcional al producto de las cantidades de las sustancias no convertidas A y B, supóngase que las unidades de medida se eligen de tal forma que una unidad del compuesto C esta formado de la combinación de una unidad A con una unidad B. Si el tiempo t = 0, hay "a" unidades de sustancia A, "b", unidades de sustancia B y ninguna del compuesto C presente. Muéstrese que la ley de conversión puede expresarse con la ecuación $\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$ resolver esta ecuación con la condición inicial dada.

Rpta: $x=\frac{ab[\exp(a-b)kt-1]}{b\exp(a-b)kt-a}, a\neq b$

14. Cierta cantidad de sustancia, que contenía 3 kgrs. de humedad, se colocó en una habitación de $100m^3$ de volumen donde el aire tenía al principio el 25% de humedad. El aire saturada, a esta temperatura, contiene 0.12 kgr. de humedad por $1m^3$, si durante el primer día la sustancia perdió la mitad de su humedad. ¿Qué cantidad de humedad quedará al finalizar el segundo día?

Rpta: $0.82kg$. $Sug.\frac{ds}{dt}=ks(s+6)$

15. La salmuera de un primer recipiente pasa a otro, a razón de 2 decalitros/min., y la salmuera del segundo recipiente pasa al primero a razón de 1 decalitro/min. En un principio hay 1 hectolitro de salmuera, conteniendo 20 kgrs. de sal, en el primer recipiente, y 1 hectolitro de agua en el segundo recipiente. Cuánta sal contendrá el primer recipiente al cabo de 5 minutos. Se supone que en todo momento es homogénea la mezcla de sal y agua en cada recipiente.

Rpta: $6\frac{2}{3}\,kgr.$

16. Salmuera que contiene 2 kgr. de sal por decalitro entre un primer tanque a razón de 2 decalitros/min. del primer tanque pasa la salmuera a un segundo tanque a razón de 3 decalitros/min., y sale de éste segundo tanque a razón de 3 decalitros/min. En un principio, el primer tanque contiene 1 hectolitro de salmuera con 30 kgrs. de sal, y el segundo tanque contiene 1 hectolitro de agua pura. Suponiendo las soluciones homogéneas en cada tanque. Hallar la cantidad de sal en el segundo tanque al cabo de 5 minutos.

Rpta: 19.38 kgr.

17. Se ha descubierto que una bola de naftalina que tenía originalmente un radio de 1/4 de pulgadas, tiene un radio de 1/8 de pulgada al cabo de un mes. Suponiendo que se evapore a un índice proporcional a su superficie. Encuéntrese el radio en función del tiempo; después de cuántos meses más desaparecerá por completo.

Rpta: r = (2 - t)/8 después de 1 mes más.

18. El Presidente y el primer Ministro piden café y reciben tazas a igual temperatura y al mismo tiempo. El Presidente agrega inmediatamente una pequeña cantidad de crema fría; pero no se toma café hasta 10 min. después. El primer Ministro espera 10 min. y, luego añade la misma cantidad de crema fría y comienza a tomarse su café. ¿Quién tomará el café más caliente?

Rpta: El Presidente.

19. Supongamos que un elemento radiactivo dado, A, se descompone en un segundo elemento B y que, a su vez B se descompone en un tercer elemento, C. Si la cantidad de A presente inicialmente es de X_0, si las cantidades de A y B presentes en un momento posterior son X y Y respectivamente y si K_1, K_2 son las constantes de rapidez de esas dos reacciones. Encuéntrese y en función de t.

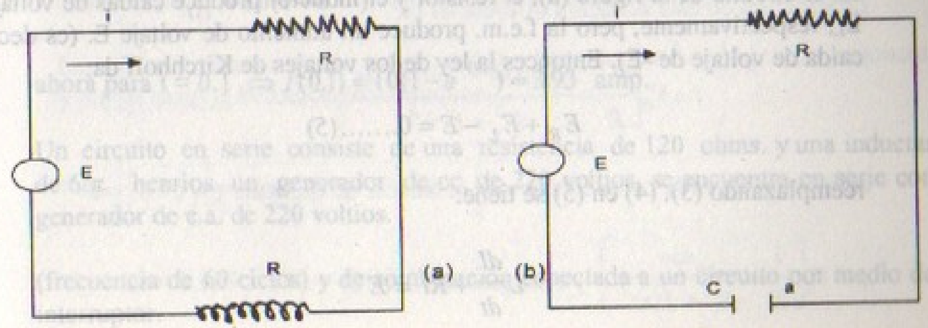
Rpta: $S: K_1\neq K_2\; y=\frac{K_1 t_0}{K_2-K_1}(e^{-k_1 t}-e^{-k_0 t})$

20. Se desea enfriar una solución contenida en un matraz y que está a 90º C. Se coloca el dispositivo en un recipiente amplio por el que circula agua a 18º C y se observa que después de 2 min. la temperatura desciende 10º C. Halle el tiempo total de enfriamiento.

21. Se mezclan "a" grs. de sustancia A y "b" grs. de sustancia B para formar el compuesto X con m partes en peso de A y n partes de B. Encontrar la cantidad de X formado durante el tiempo t.

3.5. Aplicaciones a los Circuitos Eléctricos Simples:

Consideremos circuitos eléctricos simples compuestos de un resistor y un inductor o condensador en serie con una fuente de fuerza electromotriz (f.e.m.), a estos circuitos mostraremos en la figura a) y b) y su funcionamiento es simple de entender.



Ahora estableceremos las relaciones siguientes.

1° Una fuerza electromotriz (f.e.m) E (Volts) producido casi siempre por una batería o un generador, hace fluir una carga eléctrica Q (coulombios) y produce una corriente I (Amperios). La corriente se define como la rapidez de flujo de la carga Q y puede escribirse:

$$I = \frac{dQ}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

2° Un resistor de resistencia R (ohms) es una componente del circuito que se opone a la corriente y disipa energía en forma de calor. Produce una caída de voltaje que está dada por la ley de ohm.

$$E_R = RI \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

3° Un inductor de inductancia L (henrios) se opone a cualquier cambio en la corriente produciendo una caída de voltaje de:

$$E_L = L\frac{dI}{dt} \ldots\ldots\ldots(3)$$

4° Un condensador de capacitancia C (farandios) acumula o carga. Al hacerlo se resiste al flujo adicional de carga, produciendo una caída de voltaje de:

$$E_c = \frac{Q}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Las cantidades R, L y C son generalmente constantes dependientes de los componentes específicos del circuito; E puede ser constante o una función del tiempo. El principio fundamental que gobierna estos circuitos es la ley de los voltajes de Kirchoff. "La suma algebraica de todas las caídas de voltaje alrededor de un circuito cerrado es cero".

En el circuito de la figura (a), el resistor y el inductor produce caídas de voltaje E_R y E_L, respectivamente, pero la f.e.m. produce un aumento de voltaje E. (es decir, una caída de voltaje de -E). Entonces la ley de los voltajes de Kirchhoff da:

$$E_R + E_L - E = 0 \ldots\ldots(5)$$

reemplazando (3), (4) en (5) se tiene:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E$$

Ejercicios Desarrollados

1. Una inductancia de 2 henrios y una resistencia de 10 ohms se conecta en serie con una f.e.m. de 100 volts, si la corriente es cero cuando t = 0. ¿Cuál es la corriente después de 0.1 seg?

Solución

Como L = 2, R = 10 y E = 100 entonces la ecuación que gobierna es:

$L\frac{dI}{dt} + RI = E$ reemplazando

$2\frac{dI}{dt} + 10I = 100$ simplificando

$\frac{dI}{dt} + 5I = 50$ ecuación lineal en I.

$$I_{(t)} = e^{-\int 5dt}\left[\int e^{\int 5dt}\, 50dt + c\right]$$

$$I_{(t)} = e^{-5t}\left[\int 50e^{5t}\,dt + c\right]$$

$$I_{(t)} = e^{-5t}\left[10e^{5t} + c\right]$$

$I_{(t)} = 10 + c.e^{-5t}$ Como I(0) = 0

$$0 = 10 + c \Rightarrow c = -10$$

$$\therefore\ I_{(t)} = 10(1 - e^{-5t})$$

ahora para t = 0.1 $\Rightarrow I(0.1) = 10(1 - e^{-0.5}) = 3.93$ amp.

2. Un circuito en serie consiste de una resistencia de 120 ohms. y una inductancia de 6/π henrios un generador de cc. de 220 voltios, se encuentra en serie con un generador de c.a. de 220 voltios.

(frecuencia de 60 ciclos) y de combinación conectada a un circuito por medio de un interruptor.

Encontrar:

a) La corriente en el tiempo t después que se ha cerrado el interruptor.

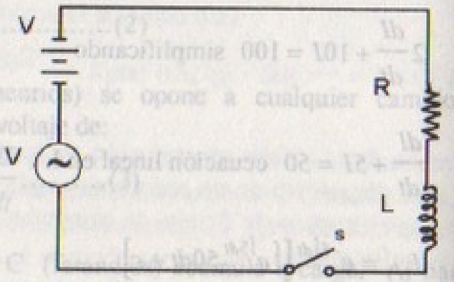
b) La corriente después de $\frac{1}{20\pi}$ seg.

c) La corriente en estado permanente (o estacionaria)

d) El voltaje en la inductancia y el voltaje en la resistencia cuando $t = \frac{1}{20\pi}$ seg.

Solución

Datos: Vo = 220 voltios



V = Vo sen wt = 220 sen wt

W = 2π f = 120 rad/seg.

R = 120 ohms.

$L = \frac{6}{\pi}$ henrios

a) La ecuación que gobierna la corriente en el circuito al cerrar el interruptor S, es dado por la segunda Ley de Kirchoff.

$$L\frac{di}{dt} + R = V_0 + V = V_0(1 + \operatorname{sen} wt)$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_0}{L}(1 + \operatorname{sen} wt) \qquad \text{.......................................(1)}$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$i = V_0\left[\frac{1}{R} + \frac{R \operatorname{sen} wt - Lw \cos wt}{R^2 + L^2 w^2}\right] + ce^{-Rt/L} \qquad \text{...........(2)}$$

aplicamos ahora la condición inicial, evidente de que para t = 0 → i=0

$$c = V_0\left[\frac{1}{R} - \frac{Lw}{R^2 + L^2 w^2}\right]$$ y reemplazando en (2)

$$i = \frac{V_0}{R} + \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2}}\left[\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 w^2}} \operatorname{sen} wt - \frac{Lw}{R^2 + L^2 w^2} \cos wt\right] +$$

$$V_0\left(\frac{Lw}{R^2 + L^2 w^2} - 1\right)e^{-Rt/lt}$$

definimos el ángulo θ del modo siguiente:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{LW}{R}, \quad \cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 w^2}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{Lw}{\sqrt{R^2 + L^2 w^2}}$$

entonces:

$$i = \left(\frac{V_0}{R}\right) + \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2 w^2}} \operatorname{sen}(wt - \theta) + V_0\left(\frac{Lw}{R^2 + L^2 w^2} - \frac{1}{R}\right)e^{\frac{Rt}{L}} \qquad \text{....... (3)}$$

que es la solución final.

Reemplazando los valores numéricos dados, en (3)

$$i = \frac{11}{6}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{37}} \operatorname{sen}(120\pi t - arc\ \operatorname{tg} 6) \frac{31}{37} e^{-20\pi t}\right] \qquad \text{......... (4)}$$

b) reemplazando en (3) $t = \frac{1}{20\pi}$ seg.

$$i = \frac{11}{6}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{37}} \operatorname{sen}(6 - arc\ \operatorname{tg} 6) \frac{31}{37} e^{-1}\right] \approx 0.969 \text{ amp.}$$

observe que el argumento de la serie es dado en radianes

c) La corriente permanente (o estacionaria) corresponde a t muy grande, entonces $e^{-20\pi t}$ y por lo tanto la ecuación (4) se reduce.

$$i = \frac{11}{6}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{37}} \operatorname{sen}(120\pi t - arc\ \operatorname{tg} 6)\right]$$

d) $V_R = iR = 0.969 \times 120 \approx 116.3$ voltios.

$$V_L = L\frac{di}{dt} = \frac{220}{\sqrt{37}}\left[6\cos(120\pi t - arc.\text{tg}\,6) + \frac{31}{\sqrt{37}}e^{-20\pi t}\right]_{t=\frac{1}{20\pi}}$$

$V_L \approx 42.3$ vlts.

3. En un circuito RC el condensador tiene una carga inicial q_0 y la resistencia R varía linealmente de acuerdo a la ecuación.

$R = k_1 + k_2 t$, con $K_1 > 0$ y $k_2 > 0$

La segunda Ley de Kirchoff, que suponemos válida pese a que R no es constante asegura que:

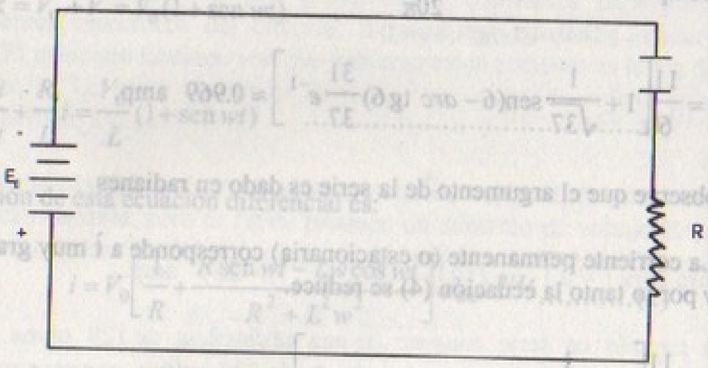
$Ri + \frac{q}{c} = E_0$ esto es: $(k_1 + k_2 t)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = E_0$

Encontrar i cuando t = 0.3 segundos.

Si $q_0 = 2$ coulombios, $k_1 = 1$, $k_2 = 0.1$, $c = 0.05$ farandios , $E_0 = 50$ voltios

Solución

De la ecuación dada se tiene: $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c(k_1 + k_2 t)}q = \frac{E_0}{k_1 + k_2 t}$ y la solución de esta ecuación diferencial es:



$$q = e^{-\int\frac{dt}{c(k_1+k_2 t)}}\left[\int e^{\int\frac{dt}{c(k_1+k_2 t)}}\frac{E_0}{k_1 + k_2 t}dt + C_0\right]$$

$$q = e^{-1/ck_2 Ln(k_1+k_2 t)}\left[\int e^{1/ck_2 Ln(k_1+k_2 t)}\frac{E_0}{k_1 + k_2 t}dt + C_0\right]$$

$$q = [k_1 + k_2 t]^{-1/ck_2}\left[\int (k + kt)^{1/ck_{2-1}} E_0 dt + C_0\right]$$

$$q = CE_0 + k_1^{\frac{1}{ck_2}}(q_0 - CE_0)(k_1 + k_2 t)^{-\frac{1}{ck_2}-2}$$

y derivando para hallar la corriente eléctrica.

$$i = \frac{dq}{dt} = (k_1)^{\frac{1}{ck_2}}(E_0 - \frac{q_0}{C})(k_1 + k_2 t)^{-(\frac{1}{ck_2}+1)}$$

ahora reemplazando los valores numéricos:

t = 0.3 seg. $q_0 = 2$ coul, $k_1 = 1$, $k_2 = 0.1$, c = 0.05 farad. $E_0 = 50$ voltios

encontrándose: $i \approx 0.0244$ amperios

4. Hallar la intensidad de corriente que circula por un circuito RL impulsada por la fuerza electromotriz:

$V = V_0 e^{-2t}\cos 2t$ cuando L = 0.4 henrios.

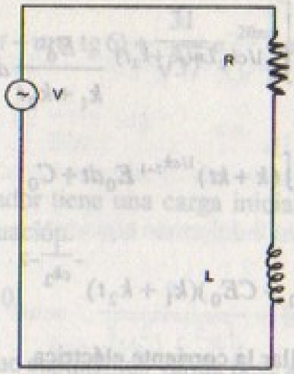
R = 5 ohmios, $V_0 = 100$ voltios, i = 0 para t = 0

Solución

De acuerdo a la segunda ley de Kirchoff, la corriente en el circuito es gobernada por la ecuación:

$Ri + L\frac{di}{dt} = V$ y reemplazando $V = V_0 e^{-2t}\cos 2t$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = (\frac{V_0}{L})e^{-2t}\cos 2t$$



reemplazando los valores numéricos:

$$\frac{R}{L} = 12.5\frac{ohm}{henrios}$$

$$\frac{V_0}{L} = 250\frac{voltios}{henrios}$$

entonces $\frac{di}{dt} + 12.5i = 250e^{-2t}\cos 2\pi t$ y la solución de esta ecuación es:

$$i = e^{-12.5t}\left[\int e^{12.5t}\, 250e^{-2t}\cos 2dt + c\right]$$

siendo C una constante de integración efectuando la integral se tiene:

$$i = e^{-12.5t}\left[250e^{10.5t}\frac{[10.5\cos 2\pi t + 2\pi\ \text{sen}\ 2\pi t]}{[(10.5)^2 + (2\pi)^2]} + C\right]$$

$$i = 1.66e^{-2t}\,10.5\cos 2\pi t + 2\pi\ \text{sen}\ 2\pi t + ce^{-12.5t}$$

usando ahora las condiciones iniciales de que para t = 0, i = 0, entonces:
C = -17.43

Por tanto: $i = 1.66[10.5\cos 2\pi t + 2\pi\ \text{sen}\ 2\pi t]e^{-2t} - 17.43e^{-12.5t}$

5. Se introduce una f.e.m. en un circuito que contiene en serie una resistencia de 10 ohsms. y un condensador no cargado cuya capacidad es de 5×10^{-4} faradios. Encontrar la corriente y la carga en el condensador cuando:

t = 0.01 seg.

a) Si V = 100 voltios

b) Si V = 100 sen 120 t volts.

Solución

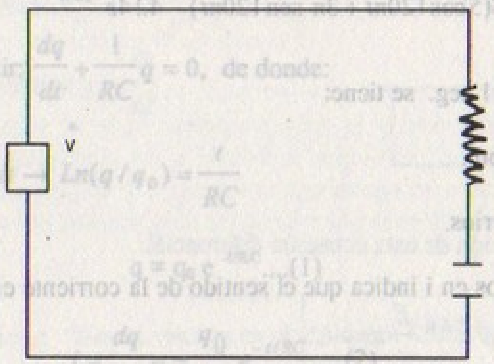
La ecuación para el circuito se obtiene de la segunda Ley de Kirchoff.

$$Ri + \frac{q}{c} = V$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = V \quad (\text{se usa } i = \frac{dq}{dt})$$

y la solución de esta ecuación diferencial es:

$$q = e^{-t/RC}\left[\int \frac{e^{t/RC}V}{R}dt + C_0\right] \ldots(1)$$



Siendo C_0 una constante de integración

a) Si V = 100 voltios constantes, entonces en (1) e integrando.

$q = VC + C_0\, e^{-t/RC}$

y usando la condición inicial de que para t = 0, q = 0, se halla C_0, luego:

$$q = VC\,[\,1 - e^{-t/RC}\,] \ldots(2)$$

y la corriente eléctrica i es dado por:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} e^{-t/RC} \quad ....(3)$$

reemplazando valores numéricos en (2) y (3) para t = 0.01 seg. se encuentra:

$q \approx 0.043$ coul.

$i \approx 1.35$ amp.

b) Si $V = 100 \text{sen} 20\pi t$ volt. entonces reemplazando en (1) e integrando y a la vez reemplazando los valores numéricos salvo, t se tiene:

$q = 0.0022\,(5 \text{ sen } 120\pi t - 3\pi \cos 120\pi t) + C_0 e^{-200t}$ y usando la condición:

$t = 0 \rightarrow q = 0$ se halla $C_0 = 0.0207$, de modo que:

$q = 0.0022\,(5 \text{ sen } 120\pi t - 3\pi \cos 120\pi t) + 0.0207\, e^{-200t}$

$$i = \frac{dq}{dt} = 0.83(5\cos 120\pi t + 3\pi \text{ sen } 120\pi t) - 4.14 e^{-200t}$$

y para t = 0.01 seg. se tiene:

$q = 0.0131$ coul.

$i = -8.5$ amperios.

el signo menos en i indica que el sentido de la corriente en el circuito es contraria al caso (a)

6. Una f.e.m. de 100 voltios se introduce en un circuito que contiene en serie una resistencia de 10 ohsms y un condensador no cargado cuya capacitancia es de 5×10^{-4} faradios. Cuando se ha alcanzado el estado permanente (o estacionario), se desconecta la f.e.m. del circuito. Encontrar la corriente y la carga del condensador 0.01 seg. después de la desconexión de la f.e.m.

Solución

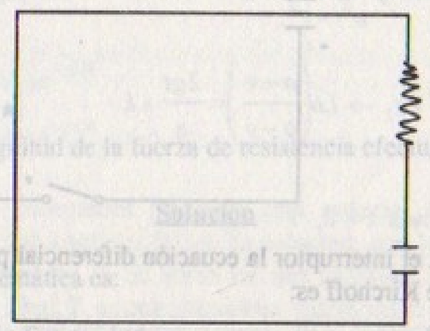
Este problema en su primera parte es decir cuando está conectado V, es igual a la parte (a) del problema anterior y por lo tanto se cumple:

$q = VC\,[\,1 - e^{-t/RC}\,]$, $i = (\frac{V}{R}) e^{-t/RC}$

el estado permanente (o estacionario se cumple cuando t es un tiempo muy grande y entonces :$e^{-t/RC}$ tiende a cero, por tanto los valores finales de carga y corriente serán:

$q = VC = 0.05$ Coulb., $i = 0$.

En la segunda parte, cuando se desconecta la fuente en f.e.m. V del circuito (instante inicial t = 0, H) se tiene: para $t = 0 \rightarrow q = q_0 = 0.05$ coulb. y la ecuación para el circuito de acuerdo a la segunda ley de Kirchoff, con V = 0 será:



$Ri + \frac{q}{c} = 0$ es decir: $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0$, de donde:

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \rightarrow Ln(q/q_0) = -\frac{t}{RC}$$

$$q = q_0\, e^{-t/RC} \quad ....(1)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} \quad ....(2)$$

Reemplazando los valores numéricos en (1) y (2) para:

t = 0.01 seg. se encuentre

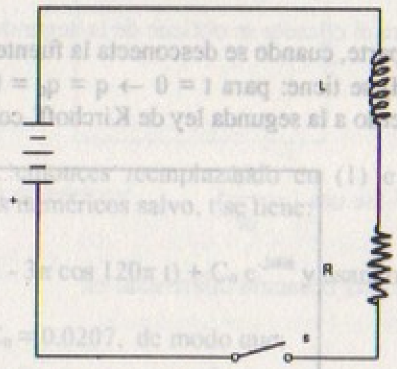
$q = 0.00677$ coul, $i = -1.354$

El signo menos en i se refiere a que ahora el sentido de la corriente es contrario al caso en que la fuente de f.e.m. estaba conectada al circuito.

7. Una inductancia de 1 henry y una resistencia de 100 ohms. están conectadas en serie con una fuente constante E (volts.) por medio de un interruptor. El interruptor se cierra y 0.01 seg. más tarde la corriente es 0.5 amp.

Encontrar E.

Solución



Cuando se cierra el interruptor la ecuación diferencial para la corriente de acuerdo a la segunda ley de Kirchoff es:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

Luego la solución de esta ecuación diferencial.

$$i = e^{-(R/L)t}\left[\int e^{(R/L)t}\,\frac{E}{L}\,dt + C\right]$$

Siendo C constante de integración de donde:

$i = \frac{E}{R} + Ce^{-(R/L)t}$ y por condiciones iniciales se tiene:

para t = 0, i = 0 $\rightarrow C = -\frac{E}{R}$

por tanto: $i = \frac{E}{R}\left[1 - e^{-(R/L)t}\right]$

aquí reemplazando los valores para t = 0.01 seg. i = 0.5 amp., junto con el resto de valores numéricos y despejando E:

$$E = \frac{50}{1 - e^{-1}} \approx 79.4 \text{ volts.}$$

8. En el movimiento de un objeto a través de un cierto medio (aire a ciertas presiones es un ejemplo) el medio efectúa una fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad del objeto móvil, supongase que el cuerpo cae por acción de la gravedad, a través de tal medio. Si t representa el tiempo y v la velocidad positiva hacia abajo, y g es la aceleración de la gravedad constante usual, y w el peso del cuerpo, usando la ley de Newton, fuerza igual a masa por aceleración, concluir que la ecuación diferencial del movimiento es:

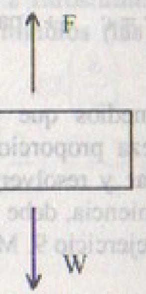
$$\frac{w}{g}\frac{dv}{dt} = w - kv^2.$$

donde kv^2 es la magnitud de la fuerza de resistencia efectuada por el medio.

Solución

La descripción matemática es:

$\frac{dv}{dt} = -kv^2$, además F = w - kv^2



para F = m.a, también a = $\frac{dv}{dt}$

y m = $\frac{w}{g}$ Luego:

$$F = \frac{w}{g}\frac{dv}{dt}$$

Por lo tanto se tiene: "fuerza viscoza es obtenida en forma experimental".

$$\frac{w}{g}\frac{dv}{dt} = w - kv^2$$

9. Resuélvase la ecuación diferencial del ejercicio (8) con la condición inicial que $v = v_0$ cuando t = 0 introducir la constante $a^2 = \frac{w}{k}$ para simplificar las fórmulas.

Solución

Como la ecuación diferencial es:

$$\left(\frac{w}{g}\right)\frac{dv}{dt} = \text{w - kv}^2 \to \left(\frac{w}{g}\right)\frac{dv}{w-kv^2} = dt$$

$$\left(\frac{w}{gk}\right)\frac{dv}{\frac{w}{k}-v^2} = dt, \text{ como } a^2 = \frac{w}{k} \text{ se tiene:}$$

$$\frac{a^2\,dv}{a^2-v^2} = gdt \to a^2\int\frac{dv}{a^2-v^2} = gt + c_1$$

$$\frac{a}{2}Ln\left(\frac{a+v}{a-v}\right) = gt+c_1 \to Ln\left(\frac{a+v}{a-v}\right) = \frac{2gt}{a}+k$$

$\frac{a+v}{a-v} = ce^{2gt/a}$ para $t = 0,\ v = v_0$

$\frac{a+v_0}{a-v_0} = c \;\to$ para $t \geq 0$; $\frac{a+v}{a-v} = \frac{a+v_0}{a-v_0}\exp\left(\frac{2gt}{a}\right)$

10.- Hay medios que oponen una fuerza de resistencia al paso de los cuerpos que los atravieza proporcional a la primera potencia de la velocidad. Para tales medios plantear y resolver problemas similares a los ejercicios 8 y 9, excepto que, por conveniencia, debe escogerse una constante b = w/k para reemplazar a la constante a^2 del ejercicio 9. Mostrar que b tiene las dimensiones de una velocidad.

Solución

La descripción matemática es:

$\frac{dv}{dt} = -kv$, además F = ma de donde:

$$\left(\frac{w}{g}\right)\frac{dv}{dt} = w - kv \to \frac{wdv}{w-kv} = gdt$$

$$\frac{w}{k}\int\frac{dv}{\frac{w}{k}-v} = \int gdt + c_1 \quad \text{pero} \quad b = \frac{w}{k}$$

$$\frac{w}{k}\int\frac{dv}{\frac{w}{k}-v} = \int gdt + c_1 \quad \text{pero} \quad b = \frac{w}{k}$$

$$b\int\frac{dv}{b-v} = \int gdt + c_1$$

$$Ln(b-v) = -\frac{gt}{b} + c_1 \to b - v = ce^{-gt/b}$$

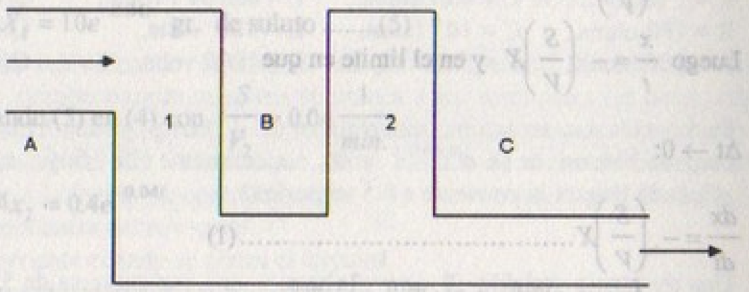
para $t = 0$, $v = v_0$ se tiene: $b - v_0 = c$

Luego $v = b - ce^{-gt/b}$

$$v = b-(b-v_0)e^{-gt/b}$$

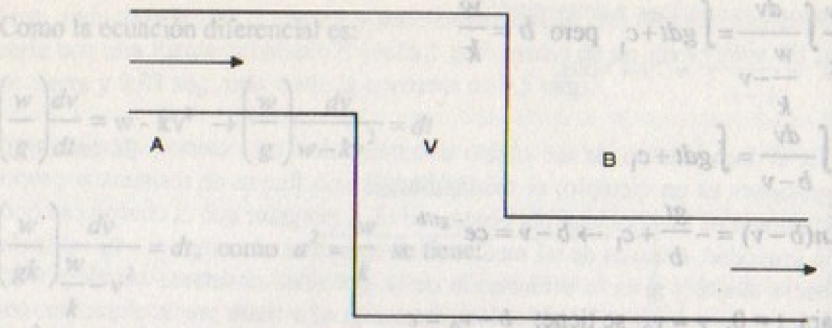
$$v = b+(v_0-b)e^{-gt/b} \quad t \geq 0$$

11.- Dos corrientes están conectados mediante una cañeria, tal como se muestra en la figura adjunta. Cada uno contiene 50 lts. de solución, con 10 gr. de soluto al tanque No, 1 y 5 grs. al tanque No. 2. Se abren las tres cañerías, haciéndose entrar agua a trávez de A. Por A, B y C circula líquido a razón de 2 litros/min. Encontrar la cantidad de soluto de ambos recipiente después de 30 minutos (las soluciones se mantienen homogéneas mediante agitadores).



Solución

Antes de proceder a resolver el problema consideremos el caso más simple de un sólo recipiente de v litros de agua en el que se encuentra una mezcla de agua y sal (soluto). Se accionan simultáneamente las llaves de A y B haciendose ingresar agua pura por A a razón de 5 litros/min. y se extrae solución por B en la misma proporción, para describir la cantidad de sal (soluto) x en función del tiempo se razona del modo siguiente:



Consideremos un intervalo de tiempo muy pequeño Δt minutos, entonces:

S Δ t = cantidad de solución que sale por B en Δ t minutos.

$\frac{X}{V}$ = concentración uniforme de sal en la solución (gr/lts)

$\left(\frac{X}{V}\right)S\Delta t$ = cantidad de sal que sale por B en t minutos por tanto la variación de sal el recipiente Δx durante el Δt es dado por:

$$\Delta x = -\left(\frac{S}{V}\right)X\Delta t$$

Luego $\frac{x}{t} = -\left(\frac{S}{V}\right)X$ y en el límite en que

Δt → 0:

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\frac{S}{V}\right)X \text{.......................................(1)}$$

que será la ecuación que gobierna X en el recipiente:

Si en el lugar de agua pura entra una solución salina con una concentración constante de c gr/lts por B, un análisis similar conduce fácilmente a la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = SC - \frac{S}{V}X \text{.......................................(2)}$$

Usando estas ideas es inmediato plantear el problema dado:

Llamemos: V_1 = volumen del recipiente No. 1.

X_1 = Cantidad de soluto del recipiente No. 1 en el instante t.

X_2 = Cantidad de soluto del recipiente No. 2 en el instante t.

V_2 = Volumén del recipiente No. 2.

entonces se cumple:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\left(\frac{S}{V_1}\right)X_1 \text{.......................................(3)}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \left(\frac{S}{V_1}\right)X_1 - \left(\frac{S}{V_2}\right)X_2 \text{..........................(4)}$$

La ecuación (3) se puede integrar directamente reemplazando:

$\frac{S}{V_1} = 0.004\frac{1}{min.}$ y usando la condición inicial que

para t = 0, $X_1 = X_{01} = 10grs.$ de soluto

Luego: $X_1 = 10e^{-0.04t}$ gr. de soluto ....(5)

reemplazando (5) en (4) con $\frac{S}{V_2} = 0.04\frac{1}{min.}$

$$\frac{dx_2}{dt} + 0.04x_2 = 0.4e^{-0.04t}$$

de donde la solución es: $x_2 = e^{-0.04t}\left[\int (e^{0.04t})(0.4e^{-0.04t})dt + c\right]$

donde C es una constante de integración, integrando esta ecuación, usando la condición inicial de que para t = 0, $X_2 = x_{02} = 5$ grs. se tiene:

$$x_2 = (0.4t + 5)e^{-0.04t} \text{ ....(6)}$$

finalmente reemplazando en (5) y (6).

t = 30 minutos se encuentra:

$X_1 = 3.01$ gr. de soluto

$X_2 = 5.12$ gr. de soluto

Ejercicios Propuestos.-

1) Supongamos que el circuito RL de la figura (a) tiene los valores dados para la resitencia, la inductancia, la f.e.m. y la corriente inicial.

Halle una fórmula para la corriente en cualquier tiempo t y cálcule la corriente después de un segundo.

a)	R = 10 ohms.,	L = 1 henrios,	E = 12 volts.,	I(0) = 0 amp.
b)	R = 8 ohms.,	L = 1 henrios,	E = 6 volts.,	I(0) = 1 amp.
c)	R = 50 ohms.,	L = 2 henrios,	E = 100 volts.,	I(0) = 0 amp.
d)	R = 10 ohms.,	L = 5 henrios,	E = 10sen t, volts.,	I(0) = 1 amp.
e)	R = 10 ohms.,	L = 10 henrios,	$E = e^t$ volts.,	I(0) = 0 amp.

2) Use la resistencia, la capacitancia, la f.e.m. y la carga inicial dada para el circuito R C de la figura (b). Halle una expresión para la carga en cualquier tiempo t.

a)	R = 1 ohms.,	C = 1 farad.,	E = 12 volts.,	Q(0) = 0 coulomb.
b)	R = 10 ohms.,	C = 0.001 farad.,	E = 10 cos 60 t volts,	Q(0) = 0 coulomb.
c)	R = 1 ohms.,	C = 0.01 farad.,	E = sen 60 t volts,	Q(0) = 1 coulomb.
d)	R = 100 ohms.,	$C = 10^{-4}$ farad.,	E = 100 volts.,	Q(0) = 1 coulomb.
e)	R = 200 ohms.,	$C = 5x10^{-5}$ farad.,	E = 1000 volts.,	Q(0) = 1 coulomb.

3) Se conecta en serie una inductancia de 1 henry y una resistencia de 2 ohms, con una batería de $6\,e^{-0.0001\,t}$ volts. inicialmente no fluye ninguna corriente. ¿Cuándo llegará la corriente a 0.5 amperios?

4) Una resitencia variable $R = \dfrac{1}{5+t}$ ohms. y una capacitancia de $5 + 10^{-6}$ farad, se conecta en serie con una f.e.m. de 100 volts. ¿Cuál es la carga del condensador después de un minuto si Q(0)= 0?

5) Halle la corriente de estado estacionario, si se conecta en serie una resistencia de 2,000 ohms. y una capacitancia de $3x10^{-6}$ farad, con un alternador de 120 cos 2t volts.

6) Un condensador de capacitancia 4×10^{-4} faradios descarga a través de una resistencia de 100 ohms, si al corriente es 1 amp. al final de 0.01 seg. ¿Cuál era la carga inicial del condensador?. ¿Cuanta resistencia debe sacarse del circuito para obtener la mitad de la corriente en el mismo tiempo?

Rpta: q = 0.0487 coulomb., R = 2.49 ohms.

7) Un condensador sin carga, de capacitancia c (farads) se descarga una fuente de voltaje constante a través de una resistencia R (ohms) ¿Cuando será la corriente (amps) igual en magnitud a la carga (coulomb) del condensador?

Rpta: $t = RcLn\left(\dfrac{Rc+1}{Rc}\right)seg.$

8) Una f.e.m. de 100 sen $120\pi t$ volts. se introduce en un circuito que contiene en serie una resistencia de 100 ohms. y un condensador con capacitancia de 5×10^{-4} faradios se tiene una carga inicial en el condensador al tiempo t = 0, cuando la f.e.m. se introduce, tal que la corriente en el tiempo cero es 1 amp. (positiva) encontrar la corriente 0.1 seg. más tarde.

Rpta: 0.181 amp.

9) Una resistencia de 10 ohms. se conecta en serie con una inductancia de L henrios. El circuito está conectado por medio de un interruptor a una fuente constante de E voltios si la corriente alcanza las ¾ de su valor de estado permanente en 0.1 seg. Encontrar L.

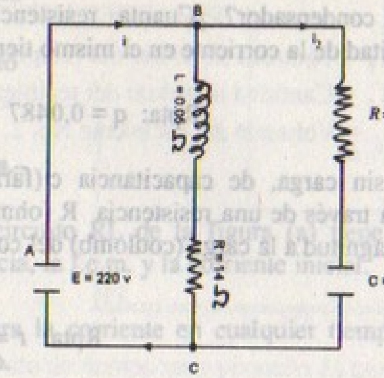
Rpta: 0.721 henrios.

10) Un cierto relevador (o interruptor magnético que está diseñado de manera que cierre un circuito cuando se aplica 60 voltios a sus terminales (es decir, cuando y = 60 voltios). La bobina del relevador tiene una inductancia de ½ henry y opera de una fuente de 120 voltios c - c. Si el circuito se cierra 0.05 seg. después de conectado a la fuente. Encontrar:

a) La resistencia del relevador.
b) La corriente cuando se cierra el circuito.
Despreciar la resistencia de los puntos.

Rpta: a) R = 6.95 ohms.
b) i = 8.63 amperios.

11) Una bobina de impedencia que tiene una resistencia de 14 ohmios y una inductancia de 0.05 henrios, y una rama que tiene una resistencia no inductiva de 15 ohmios y un condensador de capacidad 10^{-4} faradios en serie, están conectados en paralelo a través de los terminales de una f.e.m. de 220 voltios. Hallar las expresiones en función del tiempo para la carga del condensador, la corriente en la bobina de impedencia, la corriente en la resistencia no inductiva y la corriente total. Ver figura.



Rpta: $q = 0.022(1 - e^{-2.000t/3})$

$$i_2 = \frac{44}{3} e^{-2.000t/3}$$

$$i_1 = 15.71(1 - e^{-28^{\circ}t})$$

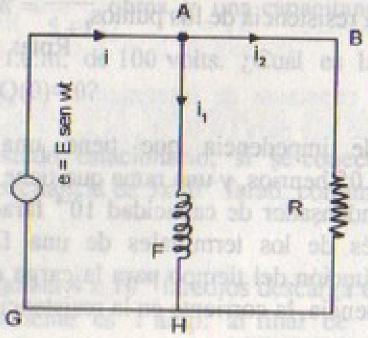
$$i = i_1 + i_2 = 15.71(1 - e^{-28^{\circ}t}) + \frac{44}{3} e^{-2.000t/3}$$

12) Para el sistema representado en la figura No. 1 obtener mediante la ley de la corriente en el punto A, $i = i_1 + i_2$ y por la ley de la f.e.m. aplicando a los circuitos A R H G y A B H G.

$$L\frac{di_1}{dt} = E \operatorname{sen} wt \ , \quad Ri_2 = E \operatorname{sen} wt$$

resolver estas ecuaciones para i_1, i_2 e i en función de t, determinar una constante de integración teniendo en cuenta la condición i = 0 cuando t = 0.

Rpta: $i_2 = \dfrac{E}{R} \operatorname{sen} wt \qquad i_1 = \dfrac{E}{Lw}(1 - \cos wt) \qquad i = i_1 + i_2$

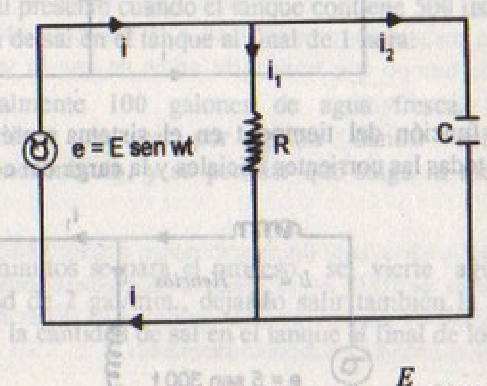


13) **De la figura No. 2, deducir las leyes de Kirchoff.**

$$i = i_1 + i_2 , \quad Ri_1 = E \operatorname{sen} wt$$

$$\frac{1}{c}\int_e i_2 \, dt = \frac{q}{c} = E \operatorname{sen} wt, \ \text{Hallar } q, \ i_1, \ i_2$$

e y en función de t.

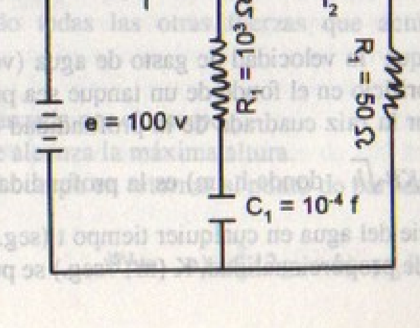


Rpta: $i_1 = \dfrac{E}{R} \operatorname{sen} wt, \ \ q = cE \operatorname{sen} wt$

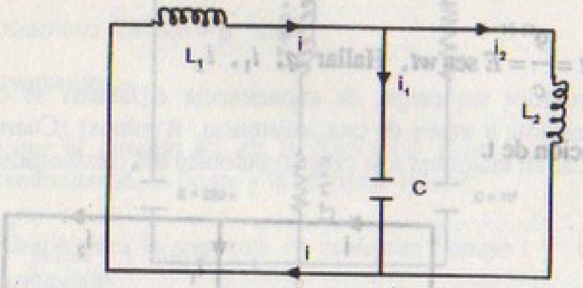
$$i_2 = cEw \cos wt$$

$$i = i_1 + i_2$$

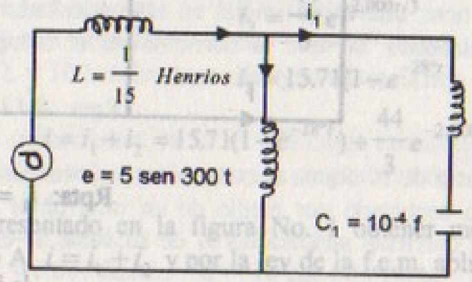
14) **Deducir para el sistema indicado en la figura, tres ecuaciones aplicando las leyes de Kirchoff, supongase que la carga del condensador es nula cuando t = 0 y deduzcase que siempre $i_2 = 2$ amperior y que $i_1 = \frac{1}{10}e^{-10t}$, teniendo tanto rápidamente a cero.**



15) Si al principio la carga del condensador de la figura indicada es q_0 e $i_1 = 0$. Demostrar que $q = q.\cos\sqrt{(L_1 + L_2) / (cL_1 x L_2)}t$ "Observación e = 0".



16) Hallar i en función del tiempo t en el sistema representado en la figura indicada, si con cero todas las corrientes iniciales y la carga del condensador.



17) Un punto material de masa igual a 1 gr. se mueve en línea recta debido a la acción de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo, calculando desde el instante t = 0, e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante t=10 seg., la velocidad era igual a 50 cm/seg. y la fuerza igual a 4 dinas. ¿Qué velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto del comienzo del movimiento?

Rpta: $V = 10\sqrt{725}\ cm/seg.$

Sug. $\frac{dv}{dt} = 20\frac{t}{v}$

18) Suponiendo que la velocidad de gasto de agua (volumen por unidad de tiempo) a través de un orificio en el fondo de un tanque sea proporcional al producto del área del orificio por la raiz cuadrada de la profundidad del agua, la ecuación diferencial es: $A\frac{dh}{dt} = -KB\sqrt{h}$, donde h (m) es la profundidad del agua y A (m^2) es el área de la superficie del agua en cualquier tiempo t (seg.) y B (m^2) es el área del orificio. La constante de proporcionalidad, K ($m^{1/2}$/seg.) se puede determinar empiricamente.

Encontrar el tiempo requerido para vaciar un tanque cúbico de 1.20 m. por lado. El tanque tiene un agujero de 5 cm. de diámetro en el fondo y originalmente está lleno de agua (tomar k = 2.65)

Rpta: $t \approx 10.2$ minutos.

19) A un tanque contiene 400 lts. de agua fresca, se le incorpora salmuera que contiene 1/8 kg/lts. de sal a razón de 8 lts/minutos y la mezcla mantenida uniforme por agitación, abandona el tanque a razón de 4 lts./min. Encontrar:

a) La cantidad de sal presente cuando el tanque contiene 500 lts. de salmuera.
b) La concentración de sal en el tanque al final de 1 hora.

20) Un tanque originalmente 100 galones de agua fresca. Se vierte agua que contiene media libra de sal por galón dentro del tanque a una velocidad de 2 galones/minuto, y se permite que salga la mezcla con la misma rapidez.

Después de diez minutos se para el proceso, se vierte agua fresca dentro del tanque a la velocidad de 2 gal/min., dejando salir también la mezcla a la misma velocidad. Encontrar la cantidad de sal en el tanque al final de los 20 minutos.

Rpta: $Q = 5 - e^{-0.2}(1 - e^{-0.2})$ lbs.

21) Un tanque con capacidad de 500 galones contiene originalmente 200 galones de agua con 100 libras de sal en solución. Se introduce dentro del tanque agua que contiene una libra de sal por galón, a la velocidad de 3 gal./min. y se permite que la mezcla fluye afuera del tanque a una velocidad de 2 gal./min. Encuéntrese la cantidad de sal en el tanque para cualquier tiempo (en libras por galón), anterior al instante cuando la solución principia a exceder la capacidad del tanque.

$Q = 200 + t - \frac{100(200)^2}{(200+t)^2}$ libras, $t < 300$

22) Un cuerpo de masa constante m se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial V_0 suponiendo que la atracción gravitacional de la tierra es constante, y despreciando todas las otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo, encontrar:

a) La máxima altura alcanzada por el cuerpo.
b) El tiempo en el que se alcanza la máxima altura.
c) El tiempo que tarda el cuerpo en retornar al punto de partida.

Rpta: a) $V_0^2/2g$, b) V_0/g, c) $2V_0/g$

23. Un cuerpo es dejado caer verticalmente hacia abajo, con un velocidad inicial V_0 en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuéntrese una relación entre la velocidad v y el tiempo t; y también la velocidad límite v_1 que alcanza después de un largo tiempo.

Rpta: $V = \frac{mg}{K} + \left(V_0 - \frac{mg}{K}\right)e^{-kt/m}$

24) Un objeto de masa m se deja caer desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuéntrese el intervalo de tiempo que transcurre antes de que la velocidad del objeto alcance el 90% de su valor límite.

Rpta: $t = \frac{m}{K}Ln10$

25) Un hombre y un bote de motor pesan juntos 320 libras . Si el empuje del motor es equivalente de 10 lb. en la dirección de movimiento que si la resitencia del agua al movimiento es numericamente igual a dos veces la velocidad en Ps/seg. y si el bote está inicialmente en reposo encontrar:

a) La velocidad del bote al tiempo t.
b) La velocidad límite.

Rpta: a) $b = 5\,(1 - e^{-0.2t})$ Ps/seg.

b) $\lim_{t\to\infty} V = 5Ps/seg.$

26) Un cuerpo con masa m es lanzado verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial V_0 es un medio que ofrece una resistencia proporcional a la raiz cuadrada de la magnitud de la velocidad. Encuéntrese la relación entre la velocidad V y el tiempo t; así como la velocidad límite.

Rpta: $2\frac{m}{K}(\sqrt{V_0} - \sqrt{V}) + 2\frac{m^2 g}{K^2}$

$$Ln\left|\frac{mg - K\sqrt{V_0}}{mg - K\sqrt{V}}\right| = t$$

$$V_1 = \left(\frac{mg}{K}\right)^2$$

27) Un cuerpo de masa m cae desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. Encuéntrese la relación entre la velocidad v y el tiempo t, así como la velocidad límite.

Rpta: $V = \left(\frac{mg}{K}\right)\frac{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} + 1}$

$$\lim_{t\to\infty} = \sqrt{\frac{mg}{K}}^{e}$$

28) Comenzó a nevar una mañana y la nieve siguió cayendo continuamente durante todo el día. Al medio día, un quitanieves comenzó a limpiar una carretera a un ritmo constante, en términos del volumén de nieve retirado a cada hora. El quitanieves limpió 2 millas para las 2 de la tarde y una milla más para las 4 de la tarde ¿Cuándo comenzó a trabajar?

Rpta: $(\sqrt{5} - 1)$ antes del medio día.

29) Un depósito contiene 100 gl. de agua pura. A partir del tiempo t = 0 se introduce salmuera que contiene 1 lb. de sal, por galón a razón de 1 gal. por minuto, la mezcla se mantiene uniforme ya que se resuelve al mismo ritmo ¿Cuándo habrá 50 lb. de sal disuelta en el depósito?

Rpta: Después de 100 en 2 minutos.

30) Un gran depósito contiene 100 gl. de salmuera en la que están disueltas 200 lb. de sal. A partir del tiempo t = 0, se introduce agua pura a razón de 3 galones por minuto y la mezcla (que se mantiene uniforme resolviéndola) sale del depósito a razón de 2 gl. por minuto. ¿Cuánto tiempo se necesitará para reducir la cantidad de sal que hay en el depósito a razón de 2 gl. por min. ¿Cuánto tiempo se necesitará para reducir la cantidad de sal que hay en el depósito de 100 lb.?

Rpta: $100(\sqrt{2} - 1)$ min.

3.6.- Aplicaciones a la Economía.-

Para el planteamiento de las ecuaciones diferenciales aplicadas a la economía, es necesario dar algunos conceptos de los términos económicos.

a) **Costo.-** Sea "y" el costo total de producir y comercializar "x" unidades de una mecancilla, está dado por la función y = F(x). Entonces:

El costo promedio por unidad es: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{F(x)}{x}$.

Si la producción total se incrementa en una cantidad Δ x a partir de un cierto nivel "x" y si el correspondiente incremento en costo Δ y, entonces el incremento promedio del costo por unidad de incremento en la producción es $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Luego el costo marginal definiremos por: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx} = F'(x)$, es decir que el costo marginal es la derivada del costo total y = F (x).

b) **Ingreso.-** Sea y = f (x) cualquier función de demanda donde "y" representa el precio unitario y "x" el número de unidades.

El ingreso total R es el producto de "x" por "y" es decir:

$$\boxed{R = x\, y = x\, f(x)}$$

El ingreso marginal con respecto a la demanda es la derivada del ingreso total con respecto a x.

$$\boxed{\frac{dR}{dx} = R'(x)}$$

c) **Elasticidad.-** La elasticidad de punto de la función y = f(x) en el punto x está dado como la razón del cambio proporcional y con respecto al cambio unitario x.

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{\dfrac{dy}{y}}{\dfrac{dx}{x}} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$

d) **Renta Nacional, Consumo y Ahorro.-**

Se llama función de consumo a la relación entre la recta nacional (total) disponible y el consumo nacional (total).

Luego la función consumo expresaremos mediante la ecuación:

$$\boxed{c = f(x)}$$

donde c representa el consumo nacional total y "x" la renta nacional (total), entonces la propensión marginal al consumos es:

$$\boxed{\frac{dc}{dx} = f'(x)}$$

mediante una análisis teórico se tiene, la renta nacional es igual l consumo más el ahorro la cual se expresa.

$$\boxed{x = c + s}$$

La propensión marginal al consumo es:

$$\boxed{\frac{dc}{dx} = f'(x)}$$

La propención marginal del ahorro es:

$$\boxed{\frac{ds}{dx} = 1 - \frac{dc}{dx}}$$

Ejemplos.

1.- **La relación entre el precio P y la cantidad demandada X es tal que la tasa de disminución en la demanda, a medida que el precio aumenta, es proporcional a la cantidad demanda e inversamente proporcional a la suma del precio más una constante. Encontrar la función de demanda si. $P = P_0$ cuando $X = X_0$.**

Solución

Sea X = X(P) la función de la demanda, de acuerdo al problema la descripción matemática es:

$$\frac{dX}{dp}=\frac{x}{p+a}\text{, de donde }\frac{dx}{x}=\frac{dp}{p+a}\text{ integrando}$$

$$\text{Ln } X = \text{Ln } (p + a)\, c \rightarrow X = (p + a)\, c$$

$$C=\frac{X}{p+a}\text{, ahora para } P_0 = P,\ X = X_0$$

Luego la función de demanda es: $X=\frac{X_0(P+a)}{P_0+a}$

2.- La tasa de incremento del costo total y, a medida que crece el número de unidades fabricadas X, es proporcional a la suma de las unidades fabricadas más una constante e inversamente proporcional el costo total. Hallar la función de costo si y = y_0 cuando x = 0, graficar la relación hallada.

Solución

Sean X = unidades fabricadas.

Y = Y(x) costo total de las unidades fabricadas.

de acuerdo al problema la descripción matemática es:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a(x+b)}{y}\text{, de donde } y\,dy = a\,(x + b)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{a(x+b)^2}{2}+C\text{, determinaremos C para esto:}$$

$$y = y_0 \text{ cuando } x = 0 \rightarrow \frac{y_0^2}{2}=ab^2+C \rightarrow C=\frac{y_0^2}{2}-\frac{ab^2}{2}\text{ Es decir:}$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{a(x+b)^2}{2}+\frac{y_0^2}{2}-\frac{ab^2}{2}$$

$$y^2 = ax^2 + 2ab^2 + y_0^2$$

$$y=\sqrt{ax^2+2ab^2+y_0^2}$$

3.- Supóngase que una suma de dinero está colocado a un interés que se acumula continuamente. Si la cantidad es S_0. ¿Cuándo el capital alcanzará la suma $S=2S_0$ si el grado de interés anual es 3%, 4%, 5%?

Solución

Llamemos: S(t) = inversión en cualquier momento.

S(0) = inversión original, K = interés

La descripción matemática es: $\frac{dS(t)}{dt}=KS(t)\rightarrow S(t)=Ae^{kt}$

determinaremos A, para esto se tiene: para t = 0 → S (0) = A,

luego S (t) = S (0) e^{kt}, para un interés del 2%, (k=0.02),

$S(t) = 2S(0)$, $2S(0) = S(0)\,e^{0.02t} \rightarrow \text{Ln}(2) = 0.02\,t$

$t=\frac{Ln(2)}{0.02}\rightarrow \quad t = 34.66$, para un interés del 3%, k = 0.03

$t=\frac{Ln(2)}{0.03}\rightarrow \quad t = 23.10$, para un interés del 4%, k = 0.04

$t=\frac{Ln(2)}{0.04}\rightarrow \quad t = 17.33$, para un interés del 5%, k = 0.05

$t=\frac{Ln(2)}{0.05}\rightarrow \quad t = 32.19$ años

4.- Un cierto hombre tiene una fortuna que aumenta a una velocidad proporcional al cuadrado de su riqueza presente. Si tenía un millón de pesos hace un año, y ahora tiene dos millones. ¿Cuánto tendrá dentro de seis meses?. ¿Dentro de dos años?.

Solución

Sea S (t) = fortuna del hombre

La descripción matemática es:

$S'(t) = KS^2(t)$, que resolviendo se tiene:

$-\frac{1}{S(t)} = Kt + C$, encontraremos C.

para t = 0, S (0) = S, luego $C = -\frac{1}{S(0)}$, entonces $-\frac{1}{S(t)} = Kt - \frac{1}{S(0)}$

$k = \frac{1}{tS(0)} - \frac{1}{tS(t)}$. Como $\frac{1}{S(t)} = \frac{1}{S(0)} - kt$

$$\frac{1}{S(t)} = \frac{1 - kt(S(0))}{S(0)} \rightarrow S(t) = \frac{S(0)}{1 - ktS(0)}$$

además S (0) = 1 x 1000^6 pesos = cantidad original

S (t) = cantidad actual en t años.

Como $K = \frac{1}{tS(0)} - \frac{1}{tS(t)} = \frac{1}{1x10^6} - \frac{1}{2x10^6} = \frac{1}{2}10^{-6}$

a) A los 6 meses = 0.5 años.

Si hace un año tenia 10^6 pesos, entre seis meses ha transcurrido

t = 1 + 0.5 = 1.5 años.

$$S(1.5) = \frac{10^6}{1 - \frac{10^{-6}}{2}.10^6(1.5)} = \frac{10^6}{1 - \frac{3}{4}} = 4.10^6$$

S(1.5) = 4´000,000 de pesos

b) A los 2 años, S (2) = ? para t = 2 años

$$S(2) = \frac{10^6}{1 - \frac{10^{-6}}{2}.10^6.2} = \frac{10^6}{0} = \infty$$

S (2) = ∞ pesos

3.- Un fabricante ha encontrado que el cambio en el costo de distribución D, a medida que aumenta las ventas S, es igual a una constante multiplicada por las ventas, m es otra constante. Si D = 0, cuando S = 0. Hallar D como una función de S y diagramar la relación obtenida.

Solución

Sean D = costo de distribución D , S = las ventas

$\frac{dD}{dS}$ = cambio en el costo de distribución D

a medida que aumenta las ventas S. Según el problema, la descripción matemática es: $\frac{dD}{dS} = aS + b$

de donde: dD = (aS + b) dS integrando

$$D = \frac{aS^2}{2} + bS + C$$

Problemas Propuestos.

1.- La razón del incremento de las ventas S, a medida que crece la gestión de propaganda X es igual a una constante menos las ventas divididas por una constante más la gestión de propaganda. Hallar la relación entre las ventas y gestión de propaganda, si $S = S^o$ cuando X = 0 graficar la relación obtenida.

Rpta: $S = S_0 - \frac{a - S_0 x}{b}$

2.- Supóngase que la tasa de incremento en el costo de ordenar y sostener y, a medida que crece la magnitud de la orden S, es igual a la relación entre la suma de los cuadrados del costo y la magnitud, dividida por el doble producto del costo y el tamaño. Hallar la relación entre el costo de ordenar y sostener y el tamaño de la orden si y = 3 cuando s = 1 graficar la relación obtenida.

Rpta: $y = (85 + s^2)^{1/2}$

3.- La relación entre el ingreso R y la cantidad demandada X es tal que la tasa de incremento en el ingreso, a medida que aumenta la cantidad demandada es igual al doble del cubo del ingreso menos el cubo de la cantidad demandada, todo dividido por el triple del producto de la cantidad demandada por el cuadrado del ingreso. Encontrar la relación entre el ingreso y la cantidad demandada si R = 0 cuando X = 10, graficar la relación obtenida.

Rpta: $R = (10x^2 - x^3)^{1/3}$

4.- La relación entre el costo de fabricación por cada item M y el número de clases de item fabricados N es tal que la tasa de incremento del costo de fabricación, a medida que aumenta el número de las clases de item, es igual a la razón del costo por item más el número de clases de item dividido por el número de clases de item. Hallar la relación entre el costo de fabricación por item y el número de clases de item fabricados si $N = M_0$ cuando $N = 1$.

Rpta: $M = N(M_0 + \text{Ln } N)$

5.- La relación entre el costo de operar un almacén de depósito y el número de galones de aceite almacenados en el depósito está dado por $\frac{dy}{dx} = Kx + a$ donde y es el costo mensual de operar el depósito (en dólares) y x es el número de galones de aceite almacenados.

Si $y = y_0$ (costo fijo) cuando $x = 0$, hallar y como función de x, y graficar.

Rpta: $y = \frac{kx^2}{2} + ax + c$

6.- La relación entre la utilidad neta P y el gasto de propaganda x es tal que la tasa de incremento de la utilidad neta a medida que crece el gasto de propaganda, es proporcional a la diferencia entre una constante y la utilidad neta. Hallar la relación entre la utilidad neta y el gasto de propaganda, si $P = P_0$ cuando $x = 0$ y graficar.

Rpta: $P = a - (a - P_0)\,e^{-kx}$

7) La razón del incremento en el costo y a medida que crece el número de unidades fabricados x es igual del doble del cuadrado del costo menos el cuadrado del número de unidades dividido por el producto del costo y el número de unidades. Hallar la relación entre el costo y el número de unidades fabricadas si y = 3 cuando x = 1.

Rpta: $y = \sqrt{8x^4 + x^2}$

8) La razón de crecimiento del volumen de ventas S, a medida que el precio P decrece, es proporcional al volumen de ventas e inversamente proporcional a la diferencia entre el precio y una constante. Hallar la relación entre el volumen de ventas y el precio, si $S = S_0$ cuando $P = P_0$.

Rpta: $S = S_0\left(\frac{P_0 - b}{P - b}\right)^a$

9) La relación entre la utilidad neta P y el gasto de propaganda X es tal que la tasa de incremento de la utilidad neta, a medida que crece el gasto de propaganda, es proporcional a la diferencia entre una constante y la utilidad neta. Hallar la relación entre la utilidad neta y el gasto de propaganda, si $P = P_0$ cuando $x = 0$.

Rpta: $P = a - (a - P_0)\,e^{-kx}$

10) La relación entre el costo promedio "y" y el número de uniades producidas "x" es tal que el cambio en el costo promedio, a medida que crece el número de unidades es igual a la relación del número menos el costo promedio, dividido por el número de unidades. Determinar la relación entre el costo promedio y el número de unidades producidas, si $\bar{y} = 9/2$ cuando $x = 1$, graficar la relación obtenida.

11) El arrendamiento de un apartamento (dos alcobas, muebles "estandar") en un colegio varía con la distancia del apartamento al campus. Supóngase que esta relación está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{K}{x} + a\right),\ 1 \le x \le 10$$

en que "y" es el arrendamiento mensual (en dólares) y "x" es la distancia (en millas), K y a son una constantes, si y = 225 cuando x = 1. Hallar "y" como una función de "x" y diagramar la relación obtenida.

Rpta: $y = 225 + a - ax - K\,\text{Ln}x$

CAPITULO IV

4.- ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

En las ecuaciones diferenciales de orden superior consideraremos dos tipos especiales:

1° caso: Las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x) \ldots\ldots\ldots(1)$$

donde f (x) es una función sólo de x.

La solución de la ecuación (1) se obtiene por integración sucesivas, es decir:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x) \Rightarrow \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int f(x)dx + c_1$$

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int\left[\int f(x)dx + c_1\right]dx + c_2$$

$$y = \int\int\left[\ldots\ldots\ldots\int f(x)dx + c_1 \ldots\ldots\ldots\right]dx + cn$$

2° caso: Las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = g(y) \ldots\ldots\ldots(2)$$

donde g es una función solo de y.

para obtener la solución de la ecuación (2) se hace del modo siguiente:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = y'\frac{dy'}{dy}, \text{ pero como}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = g(y) \text{ entonces } y'\frac{dy'}{dy} = g(y), \text{ de donde}$$

y´ dy´ = g (y) dy integrando se tiene:

$$\int y'\,dy' = \int g(y)dy + c_1 \Rightarrow \frac{y'^2}{2} = \int g(y)dy + c_1$$

$y' = \sqrt{2\left[\int g(y)dy + c_1\right]}$ separando las variables

$dy = \sqrt{2\left[\int g(y)dy + c_1\right]}\,dx$, de donde

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\left[\int g(y)dy + c_1\right]}} = \int dx + c_2$$

en forma similar si se tiene $\dfrac{d^3 y}{dx^3} = g(y)$

se decuce que $\dfrac{d^3 y}{dx^3} = y'\left[y'\dfrac{d^2 y'}{d^2 y} + \left(\dfrac{dy'}{dy}\right)^2\right]$

3° caso: Las ecuaciones diferenciales de la forma.

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0 \ldots\ldots(3)$$

donde la ecuación (3) no contiene a y, se puede rebajar el orden de la ecuación tomando como nueva función incógnita la derivada de orden inferior de la ecuación dada, osea

$y^{(k)} = z$. Obteniendose la ecuación $F(x, z, z', \ldots\ldots\ldots, z^{(n-k)}) = 0$

a) **Ejemplos.-** Resolver las siguientes diferenciales.

1.- $\dfrac{d^3 y}{dx^3} = xe^x$

Solución

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = xe^x \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \int xe^x dx + c_1 = xe^x - e^x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \int (xe^x - e^x + c_1)dx + c_2 = xe^x - 2e^x + c_1 x + c_2$$

$$y=\int(xe^{x}-2e^{x}+c_1x+c_2)dx+c_3$$

$$y=xe^{x}-3e^{x}+\frac{c_1x^2}{2}+c_2x+c_3$$

2.- $\frac{d^2y}{dx^2}+ay=0$

Solución

Como $\frac{d^2y}{dx^2}=y'\frac{dy'}{dy}\Rightarrow y'\frac{dy'}{dy}+ay=0$

$y'dy'+ay\,dy=0$, integrando se tiene:

$$\int y'dy'+\int a^2y\;dy=c_1\Rightarrow\frac{y'^2}{2}+a^2\frac{y^2}{2}=c_1$$

$$y'=\sqrt{2c_1-a^2y^2}\Rightarrow\frac{dy}{\sqrt{2c_1-a^2y^2}}=dx$$

$$\frac{1}{a}\text{arcsen}\frac{ay}{\sqrt{2c_1}}=x+x_2\Rightarrow\text{arcsen}\left(\frac{ay}{\sqrt{2c_1}}\right)=ax+ac_2$$

$$\frac{ay}{\sqrt{2c_1}}=\text{sen}(ax+ac_2)\Rightarrow y=K_1\,\text{sen}\,ax+K_2\cos ax$$

3.- $xy''=y'Ln\left(\frac{y'}{x}\right)$

Solución

$$y'=z\Rightarrow xz'=z\;Ln(z/x)\Rightarrow z'=\frac{z}{x}\;Lnz/x$$

es una ecuación homogénea z = ux de donde dz = udx + xdu entonces

$$dz=\frac{z}{x}\;Ln(z/x)dx\Rightarrow udx+xdu=uLnudx$$

xdu = (u Ln y u - u) dx, separando la variable.

$$\frac{du}{u\;Ln\;u-u}=\frac{dx}{x}\Rightarrow Ln(Ln\;u-1)=Ln\;cx$$

Ln u - 1 = cx $\Rightarrow$ Ln u = 1 + cx

$$u=e^{1-cx}\Rightarrow\frac{z}{x}=e^{1+cx}\Rightarrow z=xe^{1+cx}$$

$\frac{dy}{dx}=xe^{1+cx}\Rightarrow dy=xe^{1+cx}dx$ integrando

$$y=\frac{x}{c}e^{1+cx}-\frac{1}{c^2}e^{1+c_1x}+k$$

4) Resolver $xy'(yy''-(y')^2-y(y')^2=x^4y^3$

Solución

Sea: $y=e^{\int Z(x)dx}$

$$\Rightarrow y'=Z(x)e^{\int Z(x)dx}\quad\wedge\quad y''=Z'(x)e^{\int Z(x)dx}+(Z(x))^2e^{\int Z(x)dx}$$

Luego:

$$XZ(x)e^{\int Z(x)dx}\left[e^{\int Z(x)dx}\left(z'(x)e^{\int z(x)dx}+(z(x))^2e^{\int z(x)dx}\right)-(z(x))^2e^{2\int z(x)dx}\right]$$

$$-e^{\int z(x)dx}(z(x))^2e^{2\int z(x)dx}=x^4e^{3\int z(x)dx}$$

$$e^{3\int z(x)dx}\left[xz(x)z'(x)+x(z(x))^3-x(z(x))^3-(z(x))^2\right]=x^4e^{3\int z(x)dx}$$

$$xz(x)z'(x)-(z(x))^2=x^4$$

$$z'(x)-\left(\frac{1}{x}\right)z(x)=x^3(z(x))^{-1}$$

Ecuación Diferencial de Bernoulli en z con n = -1

$$\Rightarrow z^2 = e^{-2\int -\frac{1}{x}dx}\left[2\int e^{2\int -\frac{1}{x}dx}.x^3 dx + c\right]$$

$$z^2 = x^2(x^2 + c) \to z = x\sqrt{x^2 + c}$$

$$\therefore \quad y = e^{\int x\sqrt{x^2+c}dx} = e^{\frac{1}{3}(x^2+c)^{3/2}}$$

5. $$y^2 y''' - 3yy'y'' + 2(y')^3 + \frac{y}{x}(yy'' - (y')^2) = \frac{y^3}{x^2}$$

Solución

Sea: $y = e^{\int z(x)dx}$

$$\Rightarrow y' = z(x)e^{\int zdx} \quad ; \quad y'' = z'e^{\int zdx} + z^2 e^{\int zdx}$$

$$y''' = z''e^{\int zdx} + zz'e^{\int zdx} + 2ze^{\int zdx}z' + z^3 e^{\int zdx}$$

Reemplazando en la Ecuación Diferencial dada:

$$e^{2\int zdx}(z''e^{\int zdx} + 3zz'e^{\int zdx} + z^3 e^{\int zdx}) - (3e^{2\int zdx})^{(z'e^{\int zdx} + z^2 e^{\int zdx})} + 2z^3 e^{3\int zdx} +$$

$$\left[x^{-1}e^{\int zdx}(e^{\int zdx}(z'e^{\int zdx} + z^2 e^{\int zdx}) - z^2 e^{2\int zdx}\right] = x^{-2}e^{3\int zdx}$$

$$e^{3\int zdx}\left[z'' + 3zz' + z^3 - 3zz' - 3z^3 + 2z^3 + x^{-1}z' + x^{-1}z^2 - x^{-1}z^2\right] = x^{-2}e^{3\int zdx}$$

$$z'' + \frac{1}{x}z' = x^{-2}$$

Sea: $t = z' \Rightarrow t' = z''$

Luego la ecuación diferencial es de la forma: $t' + \frac{1}{x}t = x^{-2}$

ecuación diferencial en t

$$\Rightarrow t = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[\ e^{\int \frac{1}{x}dx}.+x^{-2}dx + c\ \right] = x^{-1}(\int x^{-1}dx + c) = \frac{Lnx}{x} + \frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow z = \int \frac{Lnx}{x}dx + c\int \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad y = e^{\int (Ln^2 x + Lnx)dx}$$

1) $\quad y = x\,y' - \text{tg}\,y'$

2) $\quad y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$

3) $\quad y = x\,y' + 1 + 4\,(y')^2$

6. $\quad y = y'\,\text{tg}\,x - (y')^2 \sec^2 x$

Solución

Sea: $z = \text{sen}\,x \to z' = (\cos x)\frac{dx}{dy} \quad ; \quad (z' = \frac{dz}{dy})$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x'}(\frac{z}{z'}x') - (\frac{1}{x'})^2(\frac{x'}{z'})^2$$

$$y = \frac{z}{z'} - \frac{1}{(z')^2}, \Rightarrow y'(z')^2 - zz' + 1 = 0$$

Sea: $z' = P \Rightarrow y \quad P^2 - z\,P + 1 = 0$ ...

$$\ldots \quad P^2 + 2yP\frac{dp}{dy} - P\frac{dz}{dy} - z\frac{dp}{dy} = 0$$

$$P^2 + 2yP\frac{dp}{dy} - P^2 - z\frac{dp}{dy} = 0$$

$$\frac{dp}{dy}(2yP - z) = 0$$

$$\Rightarrow {}^*\frac{dp}{dy} = 0 \Rightarrow P = c_1 \Rightarrow z = c_1 y + c_2$$

$$\therefore \quad \text{sen}\,x = c_1 y + c_2$$

$\Rightarrow en:\ \ yc_1^2 - (\text{sen}\,x)c_1 + 1 = 0$

es decir: $c_1^2 y - c_1\,\text{sen}\,x + 1 = 0$

$$^*\ 2yP - z = 0 \Rightarrow P = \frac{z}{2y} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dy}{2y}$$

$$Lnz = \frac{1}{2}Lny + LnK$$

$$z = Ky^{1/2}$$

$$\therefore \quad sen^2 x = K_1 y$$

7. $x y y''' - x (y')^2 - y y'' = 0$

Solución

Sea: $y' = y z \Rightarrow y'' = y' z + y z' = y z^2 + y z'$

es decir: $y'' = y (z^2 + z')$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$x y^2 (z^2 + z') - x y^2 z^2 - y^2 z = 0$

$x z^2 + x z' - x z^2 - z = 0$

$x z' - z = 0$ de donde $\frac{dz}{z} - \frac{dx}{x} = 0$

$Lnz - Lx = Lc_1$ es decir: $\frac{z}{x} = c_1$

Como: $z = \frac{y'}{y} \Rightarrow \frac{y'}{yx} c_1 \Rightarrow \frac{dy}{y} = c_1 x dx$ integrando

$$\Rightarrow \ln y = \frac{c_1}{2} x^2 + c_2$$

$$y = k_1 e^{k_2 x^2}$$

8.- $x^2 y y'' = (y - xy')^2$

Solución

Sea: $y' = yz \Rightarrow y'' = y(z^2 + z')$

$$\Rightarrow x^2 y^2 = (z^2 + z') = [y - xy(z)]^2$$

es $y^2 [x^2 z^2 + z^2 z'] = y^2 [1 - xz]^2$

$$x^2 z^2 + x^2 z' = 1 + x^2 z^2 - 2xz$$

$$\Rightarrow z' + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^2}$$

$$z = e^{-\int \frac{2}{x} dx}\left[\int e^{\int \frac{2}{x} dx} \cdot \frac{1}{x^2} dx + c\right]$$

$$z = x^{-2}[x + c] \Rightarrow \frac{y'}{y} = x^{-1} + cx^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = (x^{-1} + cx^{-2})dx \rightarrow \ln y = \ln x + \frac{c_1}{x} + c_2$$

$$y = xke^{\frac{c_1}{x}}$$

con solución: $y = c_2 e^{\frac{1}{3}(x^2 + c_1)^{3/2}}$

Observación.: Cuando la ecuación diferencial es homogénea para la función y sus derivadas, la sustitución $y' = yz$ ó $y = e^{\int z dx}$ reduce el orden de una ecuación diferencial una unidad.

11. $4x^2 yy' = 9xy^2 + 6x + 54 y^6 + 108y^4 + 72y^2 + 16$

Solución

$4x^2 yy' = 3x(3y^2 + 2) + 2(3y^2 + 2)^3$

Sea: $z = 3y^2 + 2 \Rightarrow z' = 6yy'$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} x^2 z' = 3xz + 2z^3$$

$$z' - \frac{9}{2x} z = \frac{3}{x^2} z^3$$

Bernoulli en z con: n = 3

$$\Rightarrow z^{-2} = e^{2\int -\frac{9}{2x} dx}\left[-2\int e^{-2\int -\frac{9}{2x} dx} \frac{3}{x^2} dx + c\right]$$

$$= x^{-9}\left(-6.\frac{x^8}{8}+c\right)$$

$$z^{-2} = -\frac{3}{4}x^{-1} + cx^{-9}$$

ecuación: $(3y^2+2)^2 = \dfrac{1}{-\frac{3}{4}x^{-1}+cx^{-9}}$

$$(3y^2+2)^2 = \frac{4x^9}{-3x^8+4c}$$

$$\therefore\ (3y^2+2)^2(-3x^8+4c) - 4x^9 = 0$$

12. $xyy'' + x(y')^2 = 2yy'$

Solución

Sea: $y' = yz \Rightarrow y'' = y(z^2+z')$

$$xy^2(z^2+z') + xy^2z^2 = 2y^2z$$

$2xz^2 + xz' - 2z = 0 \Rightarrow z' - \frac{2}{x}z = -2z^2$ Bernoulli con n = 2

$$\frac{dz}{z} - \frac{2dx}{x} = 0$$

$\ln z - 2\ln x = \ln c$

$$z = cx^2$$

Pero: $z = \frac{y'}{y} \Rightarrow \frac{dy}{y} = cx^2dx$

$$Lny = \frac{c}{3}x^3 + c_1$$

$$\therefore\ y = k_1e^{k_2x^3}$$

13. $yy'' - 2yy'\,Ln\,y - y'^2 = 0$

Solución

Sea: $P = y' \Rightarrow y'' = P\dfrac{dp}{dy}$

$$\Rightarrow yP\frac{dp}{dy} - 2yPLny - P^2 = 0 \Rightarrow P(y\frac{dp}{dy} - 2Lny - P) = 0$$

$$\Rightarrow P = 0 \Rightarrow y = c_1$$

ó $\dfrac{dp}{dy} - \dfrac{1}{y}P = 2\ Ln\ y$; *lineal en P*

Luego: $P = e^{-\int\frac{dy}{y}}\left[\int e^{\int\frac{dy}{y}}2\ Lny\ dy + c_1\right]$

$$P = y\left[\frac{2}{2}Ln^2y + c_1\right] \to \frac{dy}{dx} = y\ \ Ln^2y + c_1\ y$$

$$\int\frac{dy}{y\ \ L^2y + c_1y} = dx$$

$$\int\frac{dy}{y\ (L^2y + c_1y)} = dx \Rightarrow arc\ tg(\frac{Lny}{c_1}) = x + c_2$$

$$Ln\ \ y = c_1\ tg(x + c_2)$$

b) **Ejercicios Propuestos**

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = t^2$ Rpta: $x = \dfrac{t^4}{12} + c_1t + c_2$

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ Rpta: $y = (x+2)e^{-x} + x - 1$

3) $\frac{d^4y}{dx^4}=\cos^2 x,\ y(0)=\frac{1}{32},\ y'(0),\ y''(0)=\frac{1}{8},\ y'''(0)=0$

Rpta: $y=\frac{x^4}{48}+\frac{x^2}{8}+\frac{\cos 2x}{32}$

4) $\frac{d^3y}{dx^3}=x\,\mathrm{sen}\,x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$ Rpta: $y=x\cos x-3\,\mathrm{sen}\,x+x^2+2x$

5) $y''=2\,\mathrm{sen}\,x\cos^2 x-\mathrm{sen}^3 x$ Rpta: $y=\frac{\mathrm{sen}^3 x}{3}+c_1x+c_2$

6) $y'''=xe^{-x},\ y(0)=0,\ y'(0)=2,\ y''(0)=2$ Rpta: $y=-(x+3)e^{-x}+\frac{3x^2}{2}+3$

7) $\frac{d^3y}{dx^3}=x+\mathrm{sen}\,x$ 8) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a+bx}{x^2}$

9) $x\frac{d^2y}{dx^2}=1+x^2$ 10) $y'''=x+\cos x$

11) $y'''=xLnx,\ y(1)=y'(1)=y''(1)=0$

12) $y'''=\frac{x}{(x+2)^5},\ y(1)=y'(1)=y''(1)=0$

13) $y''=(2y+3)-2y'^2=0$ Rpta: $\frac{1}{2}Ln(2y+3)=c_1x+c_2$

14) $1+y'^2=yy''$ Rpta: $y=K\cosh(\frac{x+c}{K})$

15) $yy''-y'^2=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$ Rpta: $y=e^{2x}$

16) $a^2y''^2=1+y'^2$, $\pm\ (x+c_2)=a\ Ln\left[\frac{y+c_1+\sqrt{(y+c_1)^2-a^2}}{a}\right]$ ó

$y+c_1=\pm\ a\cosh\ (\frac{x+c_2}{2})$

17) $yy''-y'^2=y^2Lny$ Rpta: $Lny=c_1e^x+c_2e^{-x}$

18) $y(1-Lny)y''+(1+Lny)y'^2=0$ Rpta: $y=e^{\frac{x+c_2}{x+c_1}}$

19) $y''(1+y)=y'^2+y'$ Rpta: $Ln[c_1(y+1)-1]=c_1(x+c_2)$

20) $y''=\frac{y'}{\sqrt{y}}$ Rpta: $x=\sqrt{y}-\frac{c_1}{2}Ln\ (2\sqrt{y}+c_1)+c_2$

21) $y''=ae^y$ 22) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a}{y^3}$

23) $y^3y''=-1,\ y(1)=1,\ y'(1)=0$

24) $y''=e^{2y},\ y(0)=0,\ y'(0)=1$ 25) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{2}y^2,\ y'(1)=y(1)=1$

26) $2\frac{d^2y}{dx^2}=e^y,\ y'(0)=-1,\ y(0)=0$ 27) $y''=-\frac{1}{2y^3}$

28) $\frac{d^2y}{dx^2}=\sec^2 y.\mathrm{tg}\,y,\ y'=-1,\ x=Ln2,\ y=\pi/4$

29) $\cos^3 y\frac{d^2y}{dx^2}=\mathrm{sen}\,y,\ y'=\sqrt{2},\ y=0,\ x=0$

30) $y''y^3=1,\ y=1,\ y'=1$ para x = 1/2

31) $y''=\mathrm{sen}\,y\cos y,\ y(0)=\frac{\pi}{2},\ y'(0)=-1$

32) $y'''=xe^{-x},\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

33) $y''-\frac{y'}{x-1}=x(x-1),\ y(2)=1,\ y'(2)=-1$

Rpta: $y=\frac{1}{24}(3x^4-4x^3-36x^2+72x+8)$

34) $(1-x^2)y''-xy'=2$ Rpta: $y=(\mathrm{arcsen}\,x)^2+c_1\,\mathrm{arcsen}\,x+c_2$

35) $(1+x^2)y''+1+y'^2=0$ Rpta: $y=(1+\frac{1}{c_1^2})Ln(1+c_1x)-\frac{x}{c_1}+c_2$

36) $y'''(x-1)-y''=0,\ \ y(2)=2,\ \ y'(2)=1,\ \ y''(2)=1$

Rpta: $y=\frac{1}{6}(x^3-3x^2+6x+4)$

37) $y^2\cos x(\cos x+2yy')=2y\,\text{sen}\,x(\cos x+2yy')y'-4yy'\cos x$

sug: $y^2=z,\ \ \text{sen}\,x=\omega$

38) $yy''-y'^2=\frac{yy'}{1+x}$

39) $yy''-y'^2=y^2y'$

40) $(y'+2)e^{-y}y''=1$

41) $y''-y'^2+yy'^3=0$

42) $y=y'\,\text{tg}\,x-y'^2\sec x$

43) $x^2y'^2-x^2y'y'''-y'^2=0$

44) $(x^2+y^2)y''=(1+y'^2)(xy'-y)$

45) $y''-y'^2+yy'^3=0,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=1$ Rpta: $y^2-2y-2e^{x-y}=2x-3$

46) Hallar la ecuación de una curva que satisface a la ecuación diferencial:
$yy''=2(y')^2+y^2$ y tenga pendiente $\sqrt{3}$ en el punto (0,1)

Rpta: $2y=\sec(x+\frac{\pi}{3})$

47) $(y''+y')e^x+(\cos x+x^2)y'+(2x-\text{sen}\,x)y=-\text{sen}\,x+2x$

48) $2yy''-3y'^2=4y^2$

49) $xy'(yy''-y'^2)-yy'^2=x^4y^3$

50) $y^2y'''-3yy'y''+2y'^3+\frac{x}{y}(yy''-y'^2)=y^3/x^2$

CAPITULO V

5. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN n

Las ecuaciones diferenciales lineales de orden n son de la forma siguiente:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_0(x)y=R(x) \quad \text{........ (1)}$$

donde $a_0,a_1,a_2,\dots,a_n$ y R son funciones solo de x ó constante.
La ecuación diferencial (1) se puede escribir en la forma:

$$F(x,y',y'',\dots,y^{(n)})=0 \quad \text{........ (2)}$$

La ecuación (2) nos indica que están relacionadas, la variable independiente x, la variable dependiente y, y las derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$

Si en la ecuación (1) la función R(x) = 0, se obtiene:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \quad \text{........ (3)}$$

A la ecuación diferencial (3) se denomina ecuación diferencial lineal homogénea.

Si en la ecuación (1), la función R (x) ≠ 0, la ecuación diferencial (1) se denomina ecuación diferencial lineal no homogénea.

Si y_1, y_2 son soluciones de la ecuación diferencial (3) y si c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, entonces $y=c_1y_1+c_2y_2$ es una solución de la ecuación (3).

Como y_1, y_2 son soluciones de la ecuación (3) entonces:

$$a_n(x)y_1^{(n)}+a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}+\dots+\ a_1(x)y'_1+\ a_0(x)y_1=0$$
$$a_n(x)y_2^{(n)}+a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}+\dots+\ a_1(x)y'_2+\ a_0(x)y_2=0$$

sumando y agrupando se tiene:

$$a_n(x)(c_1y_1^{(n)}+c_2y_2^{(n)})+a_{n-1}(x)(c_1y_1^{(n-1)}+c_2y_2^{(n-1)})+\dots+$$
$$+a_0\ (x)(c_1y_1+c_2y_2)=0$$

$$a_n(x)(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n)} + a_{n-1}(x)(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n-1)} + \ldots +$$
$$+ a_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$$

entonces $c_1 y_1 + c_2 y_2$ es una solución de la ecuación diferencial (3)

En general si, y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de (3)

y si c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes, entonces

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$, es una solución de la ecuación diferencial (3).

5.1. Independencia Lineal de las Funciones

Consideremos un sistema finito de n funciones: $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ definidas en algún intervalo (a,b), diremos que estas funciones son linealmente independientes si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ escalares tal que:

$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) = 0$ entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

Si alguno de los $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ es diferente de cero, entonces diremos que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones linealmente dependientes.

Ejemplos: Averiguar si las funciones dadas son linealmente independientes.

1) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2x$, $f_3(x) = x^2$

Solución

Por determinar si $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0$ entonces $\alpha_3 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Luego $\alpha_1 . x + \alpha_2 . 2x + \alpha_3 . x^2 = 0$, derivando

$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 x = 0$, derivando nuevamente.

$2\alpha_3 = 0 \to \alpha_3 = 0 \to \alpha_1 = -2\alpha_2$

Como $\alpha_3 = 0$ y $\alpha_1 = -2\alpha_2 \to f_1(x), f_2(x)$ y $f_2(x)$ no son linealmente independientes.

5.2. El Wronskiano

Suponiendo que las n funciones: $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ son diferenciables cada uno al menos (n - 1) veces en un intervalo $a < x < b$, entonces de la ecuación $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0$ por diferenciación sucesiva se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0 \\ c_1 f'_1 + c_2 f'_2 + \ldots + c_n f'_v = 0 \\ c_1 f''_1 + c_2 f''_2 + \ldots + c_n f''_n = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_1 f_1^{(n-1)} + c_2 f_2^{(n-1)} + \ldots + c_n f_n^{(n-1)} = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (\alpha)$$

Consideraremos a (α) como un sistema de ecuaciones en $c_1, c_2, \ldots, c_n$

El sistema de ecuaciones (α) no tiene solución, excepto cuando todos los $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son ceros.

Si el determinante de los coeficientes de $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no es nulo es decir:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \ldots f_n \\ f'_1 & f'_2 \ldots f'_n \\ f''_1 & f''_2 \ldots f''_n \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} \ldots f_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces diremos que las funciones:

$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ son linealmente independientes, al determinante de los coeficientes del sistema (α) denotaremos por W, es decir:

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_n \\ f''_1 & f''_2 & \cdots & f''_n \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Llamaremos el Wronskiano de las funciones: $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$

Ejemplo N°1: Demostrar que las funciones: e^x, e^{2x}, e^{3x} son linealmente independiente.

Solución

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0, \quad \forall\ X \in R$$

entonces las funciones e^x, e^{2x}, e^{3x}, son linealmente independiente.

Ejemplo N°2: Demostrar que las funciones e^x, cos x, sen x son linealmente independiente.

Solución

$$W = \begin{vmatrix} e^x & \cos^x & \operatorname{sen} x \\ e^x & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ e^x & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = 2e^x \neq 0, \quad \forall\ X \in R$$

Entonces las funciones e^x, cos x, sen x son linealmente independiente.

Ejemplo N°3: Hallar el Wronskiano de las funciones:

$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \dfrac{1}{x}$

Solución

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f'_1 & f'_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x} \quad \text{para } x \neq 0$$

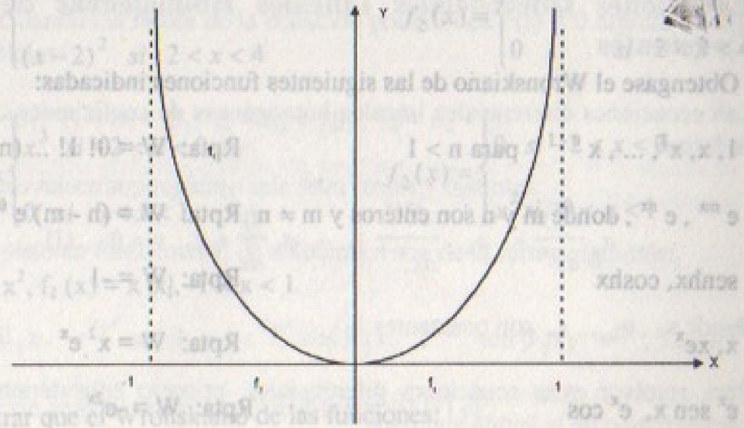
Luego $W = -\dfrac{2}{x}$ para $x \neq 0$

OBSERVACION

Que el Wronskiano $W \neq 0$, para que las funciones sean linealmente independiente es una condición necesaria pero no suficiente, por ejemplo las funciones:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \ si & -1 < x < 0 \\ 0 \ si & 0 < x < 1 \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 \ si & -1 < x < 0 \\ x^2 \ si & 0 < x < 1 \end{cases}$$

son linealmente independiente y su Wranskiano es cero.



Este sistema de funciones es linealmente independiente puesto que para

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, se cumple la identidad: $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$

En efecto:

Si $x \in [-1,0] \to \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0$

$\alpha_1 . x^2 + \alpha_2 .0 = 0 \to \alpha_1 . x^2 = 0$

$\to \alpha_1 = 0$

Si $x \in [0,1] \to \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0$

$\alpha_1 . 0 + \alpha_2 . x^2 = 0 \to \alpha_2 . x^2 = 0 \to \alpha_2 = 0$

Luego $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Consideremos el Wronskiano en [-1,0] y en [0,1]

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad W = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto: $W[f_1, f_2] = 0$ en $[-1, 1]$

Ejercicios Propuestos

I. Obtengase el Wronskiano de las siguientes funciones indicadas:

1) $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ para $n > 1$ Rpta: $W = 0!\, 1! \ldots (n-1)!$

2) e^{mx}, e^{nx}, donde m y n son enteros y $m \neq n$ Rpta: $W = (n-m)\, e^{(m+n)x}$

3) senhx, coshx Rpta: $W = -1$

4) x, xe^x Rpta: $W = x^2 . e^x$

5) e^x sen x, e^x cos Rpta: $W = -e^{2x}$

6) $\cos^2 x,\ 1 + \cos 2x$ Rpta: $W = 0$

7) e^{-x}, xe^{-x} Rpta: $W = e^{-2x}$

8) $e^x, 2e^x, e^{-x}$ Rpta: $W = 0$

9) 2, cos x, cos 2x Rpta: $W = -8 \operatorname{sen}^3 x$

10) $e^{-3x} \operatorname{sen} 2x,\ e^{-3x} \cos 2x$ Rpta: $W = -2e^{-6x}$

II. Mediante el Wronskiano, demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos son linealmente independiente.

1) $1, e^{-x}, 2e^{2x}$ 2) Ln x, x Ln x

3) $x^{1/2}, x^{1/3}$ 4) $e^{ax} \operatorname{sen} bx,\ e^{ax} \cos bx\ b \neq 0$

5) $1, \operatorname{sen}^2 x,\ 1 - \cos x$ 6) $Ln \dfrac{x-1}{x+1},\ 1$

7) $\sqrt{1-x^2},\ x$ 8) $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} \cos^2 x$

9) x^2, x^4, x^8 10) $e^x, x^{ex}, x^2 e^x$

III. Demostrar que las funciones dadas son linealmente independiente y su Wronskiano es cero, construir las gráficas de estas funciones.

1) $f_1(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ 0 < x < 2 \\ (x-2)^2 & si\ \ 2 < x < 4 \end{cases}$, $f_2(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & si\ \ 0 < x < 2 \\ 0 & si\ \ 2 < x < 4 \end{cases}$

2) $f_1(x) = \begin{cases} x^3 & si\ -2 < x < 0 \\ 0 & si\ \ 0 < x < 1 \end{cases}$, $f_2(x) = \begin{cases} 0 & si\ -2 < x < 0 \\ x^2 & si\ \ 0 < x < 1 \end{cases}$

3) $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = x\,|x|,\ -1 < x < 1$

IV.

1) Demostrar que el Wronskiano de las funciones:

$e^{k_1x}e^{k_2x}\dots e^{k_nx}$ es

$$e^{(k_1+k_2+\dots+k_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

2) Demostrar que las funciones: e^{2x}, xe^{2x}, e^{2x} sen x, e^{2x} cos x son linealmente independiente.

3) Demostrar que el Wronskiano de las funciones: $x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\gamma}$ es:

$$x^{\alpha+\beta+\gamma-3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha(\alpha-1) & \beta(\beta-1) & \gamma(\gamma-1) \end{vmatrix}$$

5.3. Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Coeficientes Constantes

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes son de la forma:

$$a_n\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0\ y = 0 \quad \dots(1)$$

donde a_0, a_1,..., a_n son constantes.

Para resolver estas ecuaciones diferenciales, primero consideramos el polinomio característico de la forma siguiente:

$$P(r) = a_n\ r^n + a_{n-1}\ r^{n-1} + \dots + a_1\ r + a_0 = 0$$

Como el polinomio característico P(r) = 0 es de grado n entonces se puede obtener las siguientes raices r_1, r_2, r_3, ... , r_n los cuales pueden ser, reales distintos, reales de multiplicidad o números complejos.

Luego para dar la solución de la ecuación (1) consideremos los siguientes casos:

1° Caso Cuando las raices de la ecuación polinómica P(r) = 0 son reales y distintos:

$r_1 < r_2 < \dots < r_n$. entonces el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (1) tiene la forma siguiente $e^{r_1x}, e^{r_2x}, \dots, e^{r_nx}$, y la solución general de la ecuación diferencial lineal homogenea (1) es:

$$y_g = c_1\ e^{r_1x} + c_2\ e^{r_2x} + \dots + c_n\ e^{r_nx}$$

2° Caso Cuando las raices de la ecuación polinómica P(r) = 0 alguna de las raices son de multiplicidad, consideremos $r_1 = r_2 = \dots = r_k = r$ donde r es la raíz de multiplicidad k, y n - k son las demás raices y distintas.

Luego el sistema fundamental de soluciones tiene la siguiente forma:

$$e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx}, \dots, x^{k-1}e^{rx}, e^{r_{k+1}x}, \dots, e^{r_nx}$$

y la solución general de la ecuación diferencial (1) es:

$$y_g = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} + c_3x^2e^{rx} + \dots + c_kx^{k-1}e^{rx} + c_{k+1}e^{r_{k+1}x} + \dots + c_ne^{r_nx}$$

3°Caso Cuando las raices de la ecuación polinómica P(r) = 0 alguna de estas raices son complejas.

$r_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $r_2 = \alpha_1 - i\beta_1$, $r_3 = \alpha_2 + y\beta_2$, $r_4 = \alpha_2 - i\beta_2$

y las demás raices supongamos que sean reales y distintas.

Luego el sistema fundamental de soluciones son de la forma siguiente:

$$e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x,\quad e^{\alpha_1x}\operatorname{sen}\beta_1x,\quad e^{\alpha_2x}\cos\beta_2x,\quad e^{\alpha_2x}\operatorname{sen}\beta_2x,\quad e^{r_5x}, \dots,\quad e^{r_nx}$$

y la solución general de la ecuación diferencial (1) es:

$$y_g = c_1\ e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + c_2\ e^{\alpha_1 x}\ \text{sen}\,\beta_1 x + c_3\ e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x + c_4\ e^{\alpha_2 x}\ \text{sen}\,\beta_2 x$$

$$+\ c_5 e^{r_5 x} + \dots + c_n\ e^{r_n x}$$

a. Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0$

<u>**Solución**</u>

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0$

es $P(r) = r^2 - 1 = 0$, y sus raíces $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, de donde el sistema fundamental de soluciones es:

$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$ es decir e^x, e^{-x} y la solución general es:

$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

<u>**Solución**</u>

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial.

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ es $P(r) = r^2 - 3r + 2 = 0$

de donde $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, luego el sistema fundamental de soluciones es: e^x, e^{2x} y la solución general $y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

3. $y'' - 4y' + 4y = 0$

<u>**Solución**</u>

El polinomio característico a la ecuación diferencial:

$y'' - 4y' + 4y = 0$ es $P(r) = r^2 - 4r + 4 = 0$

de donde $r = 2$ de multiplicidad 2.

Luego el sistema fundamental de soluciones es: e^{2x}, xe^{2x} y la solución general es:

$y_g = c_1 e^{2x} = c_2\, xe^{2x}$

4. $y'' + y = 0$

<u>**Solución**</u>

El polinomio característico a la ecuación diferencial:

$y'' + y = 0$ es $P(r) = r^2 + 1 = 0$ de donde: $r_1 = y$, $r^2 = -i$.

Luego el sistema fundamental de soluciones es: cos x, sen x, y la solución general es:

$yg = c_1 \cos x + c_2\, \text{sen}\, x$

5. $y'' + y' + y = 0$

<u>**Solución**</u>

El polinomio característico a la ecuación diferencial.

$y'' + y' + y = 0$, es $P(r) = r^2 + r + 1 = 0$

de donde $r_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $r_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Luego el sistema de solución es:

$e^{-1/2x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$, $e^{-x/2}\,\text{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ y la solución general es:

$$y_g = c_1\ e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-x/2}\,\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

6. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

Solución

El polinomio característico a la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$, de donde: $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, luego

el sistema fundamental de soluciones es: e^{-x}, e^{x}, e^{2x} y la solución general es:

$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$

7. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

Solución

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$, de donde $r_1 = -1$ de multiplicidad 3, luego el sistema fundamental de soluciones es: $e^{-x}, xe^{-x}, x^2 e^{-x}$ y la solución general es:

$$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$$

8. $y''' - y'' + y' - y = 0$

Solución

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^3 - r^2 + r - 1 = 0$, de donde: $r_1 = 1$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$, luego el sistema fundamental de soluciones es: e^{x}, cos x, sen x, y la solución general es:

$y_g = c_1 e^{x} + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$

9. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

Solución

El polinomio característico a la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$, de donde: $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, luego el sistema fundamental de soluciones es: e^{x}, e^{2x}, e^{3x} y la solución general es:

$y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

10. $y^{iv} - y = 0$

Solución

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^4 - 1 = 0$, de donde: $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = i$, $r_4 = -i$, luego el sistema fundamental de soluciones es: e^{-x}, e^{x}, cos x, sen x y la solución general es:

$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x.$

11. $y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$

Solución

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1 = 0$, de donde: $r = 1$ de multiplicidad 4, luego el sistema fundamental de soluciones es: $e^{x}, xe^{x}, x^2 e^{x}, x^3 e^{x}$ y la solución general es:

$y_g = c_1 e^{x} + c_2 xe^{x} + c_3 x^2 e^{x} + c_4 x^3 e^{x}$

12. $y^{iv} - 8y + 16y = 0$

Solución

El polinomio característico a la ecuación diferencial es

$P(r) = r^4 - 8r^2 + 16 = 0$, de donde: $(r^2 - 4)^2 = 0$

$r_1 = -2$ de multiplicidad 2

$r_2 = 2$ de multiplicidad 2

Luego el sistema fundamental de soluciones es: $e^{-2x}, xe^{-2x}, e^{2x}, xe^{2x}$ y la solución general es:

$y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 xe^{-2x} + c_3 e^{2x} + c_4 xe^{2x}$

13. $y^{iv} + 2y'' + y = 0$

Solución

El polinomio característico a la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = 0$, de donde:

$r_1 = i$ de multiplicidad 2

$r_2 = -i$ de multiplicidad 2

Luego el sistema fundamental de soluciones es: cos x, xcosx, senx, xsenx y la solución general es:

$y_g = c_1 \cos x + c_2\, x \cos x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4\, x \operatorname{sen} x$

14. $\dfrac{d^6y}{dx^6} + 6\dfrac{d^4y}{dx^4} + 9\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

Solución

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^6 + 6r^4 + 9r^2 + 4 = 0$, de donde:

$r_1 = i$ de multiplicidad 2

$r_2 = -i$ de multiplicidad 2

$r_3 = 2i,\ r_4 = -2i$

De acuerdo al tercer caso, el sistema fundamental de soluciones es: cosx, senx, xcosx, xsenx, cos2x, sen2x y la solución general es:

$y_g = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3\, x \cos x + c_4\, x \operatorname{sen} x + c_5 \cos 2x + c_6 \operatorname{sen} 2x$

b. Ejercicios Propuestos

1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ Rpta: $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ Rpta: $y = e^{2x}(c_1 x + c_2)$

3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ Rpta: $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = 0$ Rpta: $y = e^{-x/2}\left[c_1 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right]$

5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ Rpta: $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$

6) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ Rpta: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$

7) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ Rpta: $e^{-x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) = y$

8) $y''' - y'' + y' - y = 0$ Rpta: $y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$

9) $y''' - y = 0$ Rpta: $y = c_1 e^x + e^{-x/2}\left[c_2 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

10) $y^{iv} - y = 0$ Rpta: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$

11) $y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$ Rpta: $y = e^x(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3)$

12) $6y''' - y'' - 6y' + y = 0$ Rpta: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x/6}$

13) $y''' - y'' - 3y' - y = 0$ Rpta: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{(1+\sqrt{2})x} + c_3 e^{(1-\sqrt{2})x}$

14) $y^{vi} - y = 0$ Rpta: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{x/2}\left[c_3 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right]$

$+ e^{-x/2}\left[c_5 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + c_6 \operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right]$

15) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} = 0$ Rpta: $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$

16) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 4\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} = 0$ Rpta: $y = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{-2x}$

17) $\dfrac{d^4y}{dx^4} = y$ Rpta: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$

18) $\dfrac{d^4y}{dx^4}+2\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$ Rpta: $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\operatorname{sen} x$

19) $\dfrac{d^4y}{dx^4}+3\dfrac{d^2y}{dx^2}-4y=0$ Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos 2x+c_4\operatorname{sen} 2x$

20) $\dfrac{d^4y}{dx^4}-2\dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ Rpta: $y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)e^{x}$

21) $2\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=0$ Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{x/2}$

22) $2\dfrac{d^3y}{dx^3}-7\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ Rpta: $y=c_1e^{2x}+c_2e^{(-1+\sqrt{2}/2)x}+c_3e^{(-1-\sqrt{2}/2)x}$

23) $\dfrac{d^4y}{dx^4}-14\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$

Rpta: $y=c_1e^{(2+\sqrt{3})x}+c_2e^{(2-\sqrt{3})x}+c_3e^{(-2+\sqrt{3})x}+c_4e^{(-2-\sqrt{3})x}$

24) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$ Rpta: $y=A\cos kx+B\operatorname{sen} kx$

25) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+4y=0$ Rpta: $y=e^{x}(A\cos\sqrt{3}x+B\operatorname{sen}\sqrt{3}x)$

26) $4\dfrac{d^4y}{dx^4}+5\dfrac{d^2y}{dx^2}-9y=0$ Rpta: $y=c_1\ e^{x}+c_2\ e^{-x}+c_3\cos\dfrac{3}{2}x+c_4\operatorname{sen}\dfrac{3}{2}x$

27) $\dfrac{d^4y}{dx^4}+4y=0$ Rpta: $y=e^{x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x)+e^{-x}(c_3\cos x+c_4\operatorname{sen} x)$

28) $\dfrac{d^4y}{dx^4}-2\dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}-2y=0$

Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+e^{x}(c_3\cos x+c_4\operatorname{sen} x)$

29) $\dfrac{d^5y}{dx^5}+2\dfrac{d^3y}{dx^3}+10\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+10y=0$

Rpta: $y=c_1e^{-2x}+c_2\cos x+c_3\operatorname{sen} x+e^{x}(c_4\cos 2x+c_5\operatorname{sen} 2x)$

30) $2y''-3y'+y=0$ Rpta: $y=c_1e^{x/2}+c_2e^{x}$

31) $y''-9y'+9y=0$ Rpta: $y=c_1e^{(9+3\sqrt{5})x}+c_2e^{(9-3\sqrt{5})x}$

32) $y''+y'-2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$ Rpta: $y=e^{x}$

33) $y''-6y'+9y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$ Rpta: $y=2xe^{3x}$

34) $y''+8y'-9y=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$ Rpta: $y=\dfrac{1}{10}e^{-9(x-1)}+\dfrac{9}{10}e^{x-1}$

35) $y''+4y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$ Rpta: $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

36) $y''+4y'+5y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ Rpta: $y=e^{-2x}\cos x+2e^{-2x}\operatorname{sen} x$

37) $y'''-y''-y'+y=0$ Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3e^{-x}$

38) $y^{iv}-5y''+4y=0$ Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}$

39) $y^{vi}-3y^{iv}+3y''-y=0$

Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3x^2e^{x}+c_4e^{-x}+c_5xe^{-x}+c_6x^2e^{-x}$

40) $y^{v}-3y^{iv}+3y'''-3y''+2y'=0$

Rpta: $y=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{2x}+c_4\cos x+c_5\operatorname{sen} x$

41) $y^{iv}-8y'=0$ Rpta: $y=c_1+c_2e^{2x}+e^{-x}(c_3\cos\sqrt{3}x+c_4\operatorname{sen}\sqrt{3}x)$

42) $y^{viii}+8y^{iv}+16y=0$

Rpta: $y=e^{x}[(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\operatorname{sen} x]+e^{-x}[(c_5+c_6x)\cos x+(c_7+c_8x)\operatorname{sen} x]$

43) $y^{iv}+6y'''+9y''=0$ Rpta: $y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)e^{-3x}$

44) $4y'''-3y'+y=0$ Rpta: $y=(c_1 e^{-x}+c_2+c_3x)\,e^{x/2}$

45) $4y^{iv}-4y'''-23y''+12y'+36y=0$ Rpta: $y=(c_1+c_2x)\,e^{2x}+(c_3+c_4x)\,e^{-3x/2}$

46) $y^{v}-y'''=0$ Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{x}-c_5e^{-x}$

47) $y^{iv}-2y'''-3y''+4y'+4y=0$ Rpta: $y=(c_1+c_2x)\,e^{-x}+(c_3+c_4x)\,e^{2x}$

48) $y^{iv}+2y'''-6y''-16y'-8y=0$

Rpta: $y=(c_1+c_2x)e^{-2x}+(c_3 e^{(1+\sqrt{3})x}+c_4e^{(1-\sqrt{3})x}$

49) $y'''-3y'-2y=0$ cuando $x=0,\ y=0,\ y'=9,\ y''=0$

Rpta: $y=2e^{2x}+(3x-2)\,e^{-x}$

50) $y^{iv}+3y'''+2y''=0$ cuando $x=0,\ y=0,\ y'=4,\ y''=-6$

Rpta: $y=2\,(x+e^{-x}-e^{-2x})$

51) $y'''+y''-y'-y=0$, cuando $x=0, y=1$, cuando $x=2, y=0$ y también cuando $x\to\infty,\ y\to 0$

Rpta: $y=\dfrac{1}{2}(2-x)e^{-x}$

52) $y'''+2y''=0$, cuando $x=0,\ y=-3,\ y'=0,\ y''=12$

53) $y''-6y'+25y=0$ Rpta: $y=e^{3x}(c_1\cos 4x+c_2\,\mathrm{sen}\,4x)$

54) $y''-y=0$, cuando $x=0, y=y_0,\ y'=0$ Rpta: $y=y_0\cosh x$

55) $y''+y=0$, cuando $x=0, y=y_0,\ y'=0$ Rpta: $y=y_0\cos x$

56) $y'''+5y''+17y'+13y=0$, cuando $x=0, y=0,\ y'=1,\ y''=6$

Rpta: $y=e^{-x}-e^{-2x}\cos 3x$

57) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+k^2\ x=0$, k real cuando $t=0$, $x=0$, y $\dfrac{dx}{dt}=v_0$

Rpta: $x=(V_0/K)\,\mathrm{sen}\,kt$

58) $y'''+y''+4y'+4y=0$, cuando $x=0,\ y=0,\ y'=-1,\ y''=5$

59) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2b\dfrac{dx}{dt}+k^2\ x=0,\quad k>b>0$ cuando $t=0,\ x=0$ y $\dfrac{dx}{dt}=v_0$

Rpta: $x=(v_0/a)$e-bt senat. donde: $a=\sqrt{k^2-b^2}$

60) $y'''+6y''+12y'+8y=0$, cuando $x=0,\ y=1,\ y'=-2,\ y''=2$

61) $y^{iv}+2y'''+4y''-2y'-5y=0$ Rpta. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{-x}\cos 2x+c_4e^{-x}\,\mathrm{sen}\,2x$

62) $y'''-2y''+2y'=0$ Rpta. $y=c_1+c_2e^{x}\cos x+c_3e^{x}\,\mathrm{sen}\,x$

63) $y^{viii}+8y^{iv}+16y=0$ Rpta: $y=e^{x}\,[(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\,\mathrm{sen}\,x]\,+$

$+\,e^{-x}\,[(c_5+c_6x)\cos x+(c_7+c_8x)\,\mathrm{sen}\,x]$

64) $y^{iv}-4y'''+4y''=0$ Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+c_4xe^{2x}$

65) $y^{iv}-y''=0$ Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3\,e^{x}+c_4e^{-x}+c_5\cos x+c_6\,\mathrm{sen}\,x$

66) $y^{iv}-8y=0$ Rpta: $y=c_1+c_2e^{2x}+e^{-x}[c_3\cos\sqrt{3}x+c_4\,\mathrm{sen}\,\sqrt{3}x]$

67) $2y'''-4y''-2y'+4y=0$ Rpta: $y=c_1\,e^{x}+c_2\,e^{2x}+c_3\,e^{-x}$

68) $y'''-3y'-y=0$ Rpta: $y=c_1\,e^{x}+c_2\,xe^{x}+c_3\,x^2\,e^{x}$

69) $y^{iv}-5y''+4y=0$ Rpta: $y=c_1\,e^{x}+c_2\,e^{-x}+c_3\,e^{2x}+c_4\,e^{-2x}$

70) $y''-3y'''+3y''-y=0$

Rpta: $y=c_1\,e^{x}+c_2xe^{x}+c_3\,x^2\,e^{x}+c_4e^{-x}+c_5\,xe^{-x}+c_6\ x^2\,e^{-x}$

71) $y^{vi}+y=0$

Rpta: $y=c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x+e^{\sqrt{3}/2x}(c_3\cos\dfrac{x}{2}+c_4\,\mathrm{sen}\dfrac{x}{2})+e^{-\sqrt{3}/2x}(c_5\cos\dfrac{x}{2}+c_6\,\mathrm{sen}\dfrac{x}{2})$

72) $y^{v}-3y^{iv}+3y'''-3y''+2y'=0$

Rpta: $y=c_1+c_2e^{x}+c_3\,e^{x}+c_4e^{-x}+c_5\cos x+c_6\,\mathrm{sen}\,x$

73) $y'''+y'=0,\ y''(0)=1,\ y''(0)=1,\ y(0)=0$ Rpta: $y=2-2\cos x+\mathrm{sen}\,x$

74) $y'''-y''+y'-y=0$ Rpta: $y = A\cos x + B \text{ sen } x + ce^{x}$

75) $y'''+y'=0$ Rpta: $y = A\cos x + B \text{ sen } x + c$

76) $y'''-y''-y'+y=0$ Rpta: $y = (c_1 + c_2x)\, e^{x} + c_3\, e^{-x}$

77) $y'''-6y''+12y'-8y=0$ Rpta: $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{2x}$

78) $y'''-6y''+11y'-6y=0$ Rpta: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

79) $y''-12y'+35y=0$ Rpta: $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{7x}$

80) $y^{iv}-8y'''+42y''-104y'+169y=0$

Rpta: $y = e^{2x}\,[(c_1 + c_2x) \text{ sen } 3x + (c_3 + c_4x) \cos 3x]$

81) $9y''-30y'+25y=0$ Rpta: $y = (c_1 + c_2x)\, e^{5x/3}$

82) $y^{iv}-6y'''+7y''+6y'-8y=0$ Rpta: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{4x}$

83) $y''-4y'+2y=0$ Rpta: $y = e^{2x/3}\left[c_1 \text{ sen} \dfrac{\sqrt{2}}{3}x + c_2 \cos\dfrac{\sqrt{2}}{3}x\right]$

84) $y'''-2y''+3y'-6y=0$ Rpta: $y = c_1\ e^{2x} + c_2 \text{ sen}\sqrt{3}x + c_3\cos\sqrt{3}x$

85) $y^{iv}-4y'''+5y''-4y'+4y=0$ Rpta: $y = (c_1 + c_2x)\, e^{2x} + c_3 \text{ sen } x + c_4 \cos x$

86) $y'''+9y'=0$ Rpta: $y = c_1 \cos 3x + c_2 \text{ sen } 3x + c_3$

87) $y^{iv}-13y''+36y=0$ Rpta: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x}$

88) $y^{iv}+2y'''+y''=0$ Rpta: $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + c_4\, xe^{-x}$

89) $y^{iv}=8y''-16y$ Rpta: $y = (c_1 + c_2x)\, e^{2x} + (c_4 + c_3x)\, e^{-2x}$

90) $y'''-13y'-12y=0$ Rpta: $y = c_1e^{-x} + c_2\, e^{-3x} + c_3\, e^{4x}$

91) $y^{iv} + y = 0$

Rpta: $y = e^{x/\sqrt{2}}\,(c_1\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \text{sen}\dfrac{x}{\sqrt{2}}) + e^{-x/\sqrt{2}}(c_3\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}} + c_4 \text{ sen}\dfrac{x}{\sqrt{2}})$

92) $64y^{viii}+48y^{vi}+12y^{iv}+y''=0$

Rpta: $y = (c_1 + c_2\ \ x + c_3\ \ x^2)\cos\dfrac{x}{2} + (c_4 + c_5\ \ x + c_6\ \ x^2)\text{ sen}\dfrac{x}{2} + c_7\ \ x + c_8$

93) $y^{(n)} + \dfrac{n}{1}y^{(n-1)} + \dfrac{n(n-1)}{1.2}y^{(n-2)} + \ldots + \dfrac{n}{1}y' + y = 0$

Rpta: $y = e^{-x}\,(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_n\, x^{n-1})$

94) $y''' = y'$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$ Rpta: $y = 1 + \cos x$

95) $4\dfrac{d^2x}{dt^2} - 20\dfrac{dx}{dt} + 25x = 0$ Rpta: $x = (c_1 + c_2t)\, e^{2.5t}$

96) $y^{vi}+8y^{iv}+16y''=0$ Rpta: $y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)\cos 2x + (c_5 + c_6x) \text{ sen } 2x$

97) $y^{iv}+4y'''+8y'+4y=0$ Rpta: $y = e^{-x}\,[(c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x) \text{ sen } x]$

98) $y^{iv}+4y'''+5y''+4y'+y=0$

Rpta: $y = c_1 e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}x} + c_3e^{-x/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + c_4e^{-x/2} \text{ sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

99) $y^{iv}+4y^{iv}+4y''=0$

Rpta: $y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)\cos\sqrt{2}x + (c_5 + c_6x)\text{ sen}\sqrt{2}x$

100) $y'''-2y''+4y'-8y=0$ Rpta: $y = c_1e^{x} + e^{2x}[(c_2 + c_3x)\cos x + (c_4 + c_5x)\text{ sen } x]$

5.4. Ecuaciones Diferenciales Lineales no Homogéneas de Coeficientes Constantes

Las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes son de la forma siguiente:

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n} + \ \ a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \ \ a_1\frac{dy}{dx} + a_0\ \ y = R(x)\ldots.(1)$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son constantes reales.

Para obtener la solución general de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de coeficientes constantes, primero se determina la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea Y_g, y después se busca una solución particular cualquiera de la ecuación diferencial no homogénea Y_p, y la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea es igual a la suma de la solución general de la ecuación diferencial homogénea más la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea, es decir:

$$Y = Y_g + Y_p$$

Es decir que el problema se reduce a encontrar una solución particular Y_p de la ecuación diferencial lineal no homogénea. Cuando la función R(x) de la ecuación (1) tiene la forma:

$$R(x) = e^{\alpha x}\left[(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\,\text{sen}(\beta x)\right]$$

donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios de grado n y m respectivamente, entonces la solución particular Y_p de la ecuación (1) es de la forma:

$$Y_p = x^s e^{\alpha x}[\tilde{P}_K(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_K(x)\,\text{sen}(\beta x)]$$

donde K = máx {n,m} y s es el orden de multiplicidad de la raíz $r = \alpha \pm i\beta$; $\tilde{P}_K(x)$ y $\tilde{Q}_K(x)$ son polinomios en x de grado K, de coeficientes indeterminados, para determinar la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Consideremos los siguientes casos:

1° Caso: Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función $R(x) = P_n(x)$ entonces:

a) Si r = 0, no es raíz de la ecuación característica P(r) = 0, entonces la solución particular es:

$$Y_p = \tilde{P}_n(x)$$

b) Si r = 0, es raíz de la ecuación característica P(r) = 0, entonces la solución particular es:

$$Y_p = x^s \tilde{P}_n(x)$$

donde s es la multiplicidad de r = 0

2° Caso: Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función $R(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ donde α es real, entonces:

a) Si $r = \alpha$ no es raíz de la ecuación característica P(r) = 0, entonces la solución particular es:

$$Y_p = e^{\alpha x}\tilde{P}_n(x)$$

b) Si $r = \alpha$ es raíz de la ecuación característica P(r) = 0, entonces la solución particular es:

$$Y_p = x^s e^{\alpha x}\tilde{P}_n(x)$$

donde s es la multiplicidad de $r = \alpha$

3° Caso: Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función $R(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\,\text{sen}\,\beta x$ donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son funciones polinómicas de grado n y m respectivamente, entonces:

a) Si $r = \pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica P(r) = 0, entonces la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$Y_p = \tilde{P}_K(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_K(x)\,\text{sen}(\beta x)$$

donde K = máx {n,m}

b) Si $r = \pm i\beta$ es raíz de la ecuación característica P(r) = 0, entonces la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$Y_p = x^s\left[(\tilde{P}_K(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_K(x)\,\text{sen}\,\beta x)\right]$$

donde K = máx {n,m} y s es la multiplicidad de $r = \pm i\beta$

4° Caso: Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función $R(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\,\text{sen}\,\beta x]$ donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son funciones polinómicas de grado n y m respectivamente, entonces:

a) Si $r = \alpha \pm i\beta$ no es raíz de la ecuación característica P(r) = 0 entonces la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$Y_p = e^{\alpha x}\left[(\tilde{P}_K(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_K(x)\,\text{sen}\,\beta x)\right]$$

donde K = máx {n,m}

b) Si $r = \alpha \pm i\beta$ es raíz de la ecuación característica $P(r) = 0$ entonces la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$Y_p = x^s e^{\alpha x}\left[(\tilde{P}_K(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_K(x)\,\text{sen}\,\beta x)\right]$$

donde $K = \text{máx}\ \{n,m\}$ y s es la multiplicidad de $r = \alpha \pm i\beta$

A. **Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}=3$$

Solución

Sea $P(r) = r^2 + 3r = 0$ la ecuación característica donde $r_1 = 0$, $r_2 = -3$, luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$Y_g = c_1 + c_2\ e^{-3x}$$

para la solución particular se obtiene de acuerdo a la parte b) del 1° Caso, es decir:

$Y_p = Ax$

Como $Y_p = Ax \Rightarrow Y_p' = A \Rightarrow Y_p'' = 0$, reemplazando en la ecuación

de donde $0 + 3A = 3 \Rightarrow A = 1$, por lo tanto $Y_p = x$ y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es:

$$Y = Y_g + Y_p$$

es decir: $y = c_1 + c_2 e^{-3x} + x$

2. $$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-15y=-(15x^2+4x+13)$$

Solución

Sea $P(r) = r^2 - 2r - 15 = 0$ el polinomio característico, de donde: $r_1 = -3$ y $r_2 = 5$, luego la solución complementaria o solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$$y_g = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{5x}$$

Para la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea, se obtiene de acuerdo a la primera parte del primer caso es decir:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

de donde $y_p' = 2Ax + B \rightarrow y_p'' = 2A$, que reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

$2A - 4Ax - 2B - 15Ax^2 - 15Bx - 15C = -(15x^2 + 4x + 13)$

$-15Ax^2 - (4A + 15B)x + 2A - 2B - 15C = -(15x^2 + 4x + 13)$

de donde por identidad se tiene:

$-15A = -15 \rightarrow A = 1$

$-(4A + 15B) = -4 \rightarrow B = 0$

$2A - 2B - 15C = -13 \rightarrow C = 1$

Luego: $y_p = x^2 + 1$

por lo tanto la solución general de la ecuación es:

$$y = y_g + y_p$$

es decir: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{5x} + x^2 + 1$

3. $$\frac{d^4y}{dx^4}-3\frac{d^2y}{dx^2}-4y=-4x^5+390x$$

Solución

El polinomio característico es: $P(r) = r^4 - 3r^2 - 4 = 0$ de donde:

$r_1 = -2,\ r_2 = 2,\ r_3 = i\ \ y\ \ r_4 = -i$

y la solución complementaria o solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 \cos x + c_4\,\text{sen}\,x$$

Para la solución particular se debe tener en cuenta la primera parte del 1° Caso de donde se tiene:

$y_p = Ax^5 + Bx^4 + cx^3 + Dx^2 + Ex + F$, de donde derivando y reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} -4A = -4 \\ -4B = 0 \\ -60A - 4C = 0 \\ -36B - 4D = 0 \\ 120A - 18C - 4E = 390 \\ 24B - 12D - 4F = 0 \end{array}\right\}$$

de donde: $A = 1$, $C = -15$

$B = D = E = F = 0$

Luego $y_p = x^5 - 15x^3$ y la solución general es:

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x + x^5 - 15x^3$

4. $y'' + 3y' = e^x$

Solución

El polinomio característico es $P(r) = r^2 + 3r = 0$, de donde $r_1 = 0$, $r_2 = -3$, luego la solución complementaria de la ecuación diferencial homogénea es:

$y_g = c_1 + c_2 e^{-3x}$ y de acuerdo a la parte a, del segundo caso la solución particular es:

$y_p = Ae^x$ de donde $y'_p = Ae^x \to y''_p = Ae^x$

como $y'' + 3y' = e^x \to Ae^x + 3Ae^x = e^x$

$$\to A = \frac{1}{4}$$

Luego la solución particular $y_p = \dfrac{e^x}{4}$ y la solución general de la ecuación no homogénea es:

$y = y_g + y_p$ es decir:

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{e^x}{4}$$

5. $y'' - 4y' = xe^{4x}$

Solución

El polinomio característico es: $P(r) = r^2 - 4r = 0$ de donde $r_1 = 0$, $r_2 = 4$, luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es: $y_g = c_1 + c_2 e^{4x}$ y de acuerdo a la parte b, del segundo caso se tiene la solución particular de la forma:

$$y_p = x\,(Ax + B)\, e^{4x}$$

Es decir:

$y_p = (Ax^2 + Bx)\, e^{4x}$ y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es:

$y = y_g + y_p$

6. $y'' + y = \operatorname{sen} x - \cos x$

Solución

El polinomio característico es: $P(r) = r^2 + 1 = 0$, de donde: $r_1 = i$, $r_2 = -i$. Luego la solución complementaria de la ecuación diferencial homogénea es:

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

La solución particular de acuerdo a la parte b, del 3er. caso es de la forma:

$$y_p = x\,(A \cos x + B \operatorname{sen} x)$$

Es decir: $y_p = Ax \cos x + Bx \operatorname{sen} x$ y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es: $y = y_g + y_p$ es decir:

$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} + Ax \cos x + Bx \operatorname{sen} x$

7. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} (\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$

Solución

El polinomio característico es: $P(r) = r^2 - 4r + 8 = 0$, de donde:

$r_1 = 2 + 2i$, $r_2 = 2 - 2i$, luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$$y_p = xe^{2x}(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x)$$

$$y = y_g + y_p$$

8. $y'' - y' - 2y = e^{x} + e^{-2x}$

Solución

El polinomio característico es: $P(r) = r^2 - r - 2 = 0$, de donde: $r_1 = -1$, $r_2 = 2$.

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ y de acuerdo a la parte a. del 2do. caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = Ae^{x} + Be^{-2x}$$

9. $y''' - 4y' = xe^{2x} + \operatorname{sen} x + x^2$

Solución

El polinomio característico es: $P(r) = r^3 - 4r = 0$, de donde: $r_1 = 0$, $r_2 = -2$, $r_3 = 2$, luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:
$y_g = c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{2x}$ y de acuerdo al 1er y 2do. y 3er. caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x(Ax + B)e^{2x} + C\cos x + D\operatorname{sen} x + x(Ex^2 + Kx + 5)$$

$$y_p' = 2(Ax^2 + Bx)e^{2x} + (2Ax + B)e^{2x} - C\operatorname{sen} x + D\cos x + 3Ex^2 + 2Fx + G$$

$$y_p''' = 8(Ax^2 + Bx)e^{2x} + 12(2Ax + B)e^{2x} + 12Ae^{2x} + C\operatorname{sen} x - D\cos x + 6E$$

reemplazando en la ecuación diferencial e igualando coeficientes se tiene:

$12A + 8B = 0$	$-5D = 0$	$6E - 4G = 0$
$16A = 1$	$-12E = 1$	
$5C = 1$	$-8F = 0$	

de donde:

$$A = \frac{1}{16},\ B = \frac{3}{32},\ G = \frac{1}{5},\ D = F = 0$$

$$E = -\frac{1}{12},\ G = -\frac{1}{8}.\ \text{ Es decir:}$$

$$y_p = \frac{e^{2x}}{32}(2x^2 - 3x) + \frac{\cos x}{5} - \frac{x^3}{12} - \frac{x}{8}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es:

$$y = y_g + y_p$$

10. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos x + xe^{-x}$

Solución

El polinomio característico es: $P(r) = r^2 + 2r + 2 = 0$ de donde

$r_1 = -1 + i$, $r_2 = -1 - i$, luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es
:
$y_g = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x)$ y de acuerdo al 2do. y 4to. caso la solución particular es:

$$y_p = xe^{-x}(A\cos x + B\operatorname{sen} x) + (Cx + D)e^{-x}$$

derivando y reemplazando en la ecuación diferencial e igualando coeficientes se tiene que:

$A = 0$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $D = 0$ es decir: $y_p = \frac{x}{2}e^{-x}\operatorname{sen} x + xe^{-x}$ y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es:

$$y = y_g + y_p$$

II. Ejercicios Propuestos

I.- Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1) $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=x^2$ Rpta: $y=c_1+c_2e^{x}-\frac{x^3}{3}-x^2-2x$

2) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}-5y=5x$ Rpta: $y=c_1e^{-x}+c_2e^{5x}-x+\frac{4}{5}$

3) $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{dy}{dx}=x+1$ Rpta: $y=c_1+c_2e^{x}-c_3e^{-x}-\frac{x^2}{2}-x$

4) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=4(x-1)$ Rpta: $y=e^{2x}(c_1x+c_2)+x$

5) $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=2(x+1)^2$ Rpta: $y=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)+x^2$

6) $y'''+y''+y'+y=x^2+2x-2$ Rpta: $y=c_1e^{-x}+c_2\cos x+c_3\operatorname{sen}x+x^2-4$

7) $y^{iv}+4y''=8(6x^2+5)$

Rpta: $y=c_1x+c_2+c_3\cos 2x+c_4\operatorname{sen}2x+x^2(x^2+2)$

8) $y'''-3y''+3y'-y=(2+x)(2-x)$

Rpta: $y=e^{x}(c_1x^2+c_2x+c_3)+x^2+6x+8$

9) $2y''-9y'+4y=18x-4x^2$ Rpta: $y=c_1e^{x/2}+c_2e^{4x}+1-x^2$

10) $y^{iv}-2y''+y=x^2-5$

Rpta: $y=e^{x}(c_1x+c_2)+e^{-x}(c_3x+c_4)+x^2-1$

11) $y^{iv}-3y''+2y'=6x(x-3)$ Rpta: $y=c_1+e^{x}(c_2x+c_3)+c_4e^{-2x}+x^3$

12) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+5y=25x^2+12$

Rpta: $y=e^{x}(c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen}2x)+2+4x+5x^2$

13) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=12x-10$ Rpta: $y=c_1+c_2e^{2x}+2x-x^2$

14) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=2x,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$

Rpta: $y=e^{x}-\frac{e^{-2x}}{2}-x-\frac{1}{2}$

15) $y'''+4y'=x,\ y(0)=y'(0)=0,\ y''(0)=1$

Rpta: $y=\frac{3}{16}(1-\cos 2x)+x^2$

16) $y^{iv}+2y''+y=3x+4,\ y(0)=y'(0)=0,\ y''(0)=y'''(0)=1$

Rpta: $y=(x-4)\cos x-\left(\frac{3}{2}x+4\right)\operatorname{sen}x+3x+4$

17) $y^{iv}+y'''=x$

Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{-x}+e^{x/2}\left(c_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_6\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{x^4}{24}$

18) $y''+2y'+3y=9x$

Rpta: $y=c_1e^{-x}\cos\sqrt{2}x+c_2e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x+3x-2$

19) $y''+y'-2y=14x\ 2x-2x^2$ Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+x^2-6$

20) $y''+y=x^2+2,\ y(0)=y'(0)=2$ Rpta: $y=x^2+2\operatorname{sen}x$

21) $y''-y=2-x^2,\ y(0)=2,\ y'(0)=0$

22) $y''+y'+y=x^4+4x^3+12x^2$

Rpta: $y=c_1e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x+x^4$

23) $y'''-3y''+3y'-y=2x^2-3x-17$

Rpta: $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x-2x^2-9x+2$

24) $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$ Rpta: $y=(c_1+c_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$

25) $y''+4y'-5y=1$ Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{-5x}-0.2$

26) $y'''-4y''+5y'-2y=2x+3$ Rpta: $y=(c_1+c_2x)e^{x}+c_3e^{2x}-x-4$

27) $y^{v}+y'''=x^2-1$

Rpta: $y=\frac{x^5}{60}-\frac{x^3}{2}+c_1x^2+c_2x+c_3+c_4\cos x+c_5\operatorname{sen} x$

28) $y'''-y'=3(2-x)$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=1$ Rpta: $y=e^{x}+x^3$

29) $y'''-y'=x$ Rpta: $c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-x}-\frac{x^2}{2}=y$

30) $y''-2y'+y=-2$ Rpta: $y=(c_1+c_2x)e^{-x}-2$

31) $y''+9y-9=0$ Rpta: $y=c_1\operatorname{sen}3x+c_2\cos 3x+1$

32) $y'''+y''=1$ Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+\frac{x^2}{2}$

33) $5y'''-7y''-3=0$ Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3e^{7/5x}-\frac{3x^2}{14}$

34) $y^{iv}-6y'''+6=0$ Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{6x}+\frac{x^3}{6}$

35) $3y^{iv}+y'''=2$ Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{-x/3}+\frac{x^3}{3}$

36) $y^{iv}-2y'''-2y'+y=1$

Rpta: $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x+(c_3+c_4x)e^{x}-1$

37) $y''+2y'+2y=1+x$ Rpta: $y=e^{-x}(c_1\operatorname{sen} x+c_2\cos x)+\frac{x}{2}$

38) $7y''-y'=14x$ Rpta: $y=c_1+c_2e^{x/7}-7x^2-98x$

39) $y'''-y''+y'=x^2+x$

Rpta: $y=c_1e^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x$

40) $y''-4y'+4y=x^2$ Rpta: $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}$

41) $y''+8y'=8x$ Rpta: $y=c_1+c_2e^{-8x}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{8}$

42) $y''-2y'+y=x^3$ Rpta: $y=(c_1+c_2x)e^{x}+x^3+6x^2+18x+24$

43) $y^{iv}+y''=x^2+x$

Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3\cos x+c_4\operatorname{sen} x+\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-x^2$

44) $y''-6y+9y=x^2-x+3$, $y(0)=\frac{4}{3}$, $y'(0)=\frac{1}{27}$

Rpta: $y=(1-3x)e^{3x}+\frac{x^2}{9}+\frac{x}{27}+\frac{1}{3}$

45) $y'''-y=2x$, $y(0)=y'(0)=0$, $y''(0)=2$

Rpta: $y=-\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x+2x$

46) $y''+6y'+10y=x^4+2x^2+2$

47) $y'''+3y''+3y'+y=x^4+4x^3+10x^2+20x+1$

48) $y''-4y'+4y=x^2$

Rpta: $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+\frac{1}{8}(2x^2+4x+3)$

49) $y''-y'+y=x^3+6$

Rpta: $y=e^{x/2}(c_1\cos x\frac{\sqrt{3}}{2}+c_2\operatorname{sen} x\frac{\sqrt{3}}{2})+x^3+3x^2$

II.- Hallar la solución general de las ecuacione diferenciales:

1) $y''-7y'+12y=-e^{4x}$ Rpta: $y=c_1e^{3x}+c_2e^{4x}-xe^{4x}$

2) $y''-2y'+y=2e^x$ Rpta: $y=e^x(c_1+c_2x+x^2)$

3) $y''=xe^x+y$ Rpta: $c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{(x^2-x)e^x}{4}$

4) $y''-4y'+4y=xe^{2x}$ Rpta: $y=(c_1+c_2x+\frac{x^3}{6})e^{2x}$

5) $y''-6y'+9y=e^x$ Rpta: $y=(c_1+c_2x)e^{3x}+\frac{e^x}{4}$

6) $y''-3y'-4y=30e^x$ Rpta: $y=c_1e^{4x}+c_2e^{-x}-5e^x$

7) $y''-3y'-4y=30e^{4x}$ Rpta: $y=(c_1+6x)e^{4x}+c_2e^{-x}$

8) $y''-y=8xe^x$ Rpta: $y=c_1e^{-x}+e^x(c_2-2x+2x^2)$

9) $y^{iv}-y=e^{-x}$ Rpta: $y=c_1e^x+(c_2-\frac{x}{4})e^{-x}-c_3\cos x+c_4\operatorname{sen} x$

10) $y'''+y'-10y=29e^{4x}$

11) $y''+y=10e^{2x}$ cuando $x=0$, $y=0$ $\wedge$ $y'=0$

Rpta: $y=2(e^{2x}-\cos x-2\operatorname{sen} x)$

12) $y''+4y'+5y=10e^{-3x}$, cuando $x=0$, $y=0$, $y'=0$

13) $y''+3y'-10y=6e^{4x}$ Rpta: $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-5x}+\frac{e^{4x}}{3}$

14) $y''+10y'+25y=14e^{-5x}$ Rpta: $y=c_1e^{-5x}+c_2e^{-5x}+7x^2e^{-5x}$

15) $y''-y'-6y=20e^{-2x}$ Rpta: $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}-4xe^{-2x}$

16) $2y''-4y'-6y=3e^{2x}$ Rpta: $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}-\frac{e^{2x}}{2}$

17) $2y''+y'-y=2e^x$ Rpta: $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x/2}+e^x$

18) $y''+a^2y=e^x$ Rpta: $y=c_1\cos ax+c_2\operatorname{sen} ax+\frac{e^x}{a^2+1}$

19) $y''+4y'+2y=xe^{-2x}$ Rpta: $y=y_g-\frac{x}{2}e^{-2x}$

20) $6y''+2y'-y=7x(x+1)e^x$ Rpta: $y=y_g+(x^2-3x+\frac{30}{7})e^x$

21) $y'''-2y''+10y'=3xe^x$ Rpta: $y=y_g+\frac{x-1}{3}e^x$

22) $y''-y'+\frac{y}{4}=xe^{x/2}$ Rpta: $y=c_1e^{x/2}+c_2e^{x/2}+y_p$

23) $y''-y'=6x^5e^x$

Rpta: $y=c_1+(x^6-6x^5+30x^4-102x^3+360x^2-720x+c_2)e^x$

24) $y''-y=2e^x$ Rpta: $y=c_1e^{-x}+c_2e^x+xe^x$

25) $y''-4y'+3y=4e^{3x}$ Rpta: $y=c_1e^{3x}+c_2e^x+2xe^{3x}$

26) $y''-4y=6e^x$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$

27) $y''+2y'+y=e^{-2x}$ Rpta: $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+e^{-2x}$

28) $3y^{iv}+8y'''+6y''=(x^3-6x^2+12x-24)e^{-x}$

Rpta: $y=c_1+c_2x+e^{-4/3x}\left[c_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{3}+c_4\cos\frac{\sqrt{2}}{3}x\right]+(x^3-6x^2+12x)e^{-x}$

29) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 2e^{2x}$ Rpta: $y = (c_1 + mc^2x)e^x + 2e^{2x}$

30) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 3xe^x$ Rpta: $y = c_1 + c_2e^{-2x} + xe^x - \frac{4}{3}e^x$

31) $y'' - 2ky' + k^2y = e^x,\ k \neq 1$ Rpta: $y = (c_1 + c_2x)e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}$

32) $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$ Rpta: $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-x} - \frac{9}{2}xe^{-3x}$

33) $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$ Rpta: $y = c_1 + c_2e^{-3x} - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right)e^{-3x}$

34) $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$ Rpta: $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} + (20x - 5x^2)e^{-2x}$

35) $y'' + y' + y = (x + x^2)e^x$

Rpta: $y = e^{-x/2}\left[c_1 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right)e^x$

36) $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ Rpta: $y = c_1e^{2x} + \left(c_2 - x - \frac{x^2}{2}\right)e^x$

37) $y'' + y' - 2y = x^2e^{4x}$ Rpta: $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + \frac{e^{4x}}{18}(x^2 - x + \frac{7}{18})$

38) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$ Rpta: $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{e^{3x}}{5}(x^2 - x + 2)$

39) $y^{iv} - 2y''' - 2y' + y = e^x$ Rpta: $y = c_1e^x + c_2xe^{2x} + c_3\cos x + c_4 \operatorname{sen} x + \frac{x^2}{4}e^x$

40) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x},\ y(0) = y'(0) = 0$ Rpta: $y = e^{2x} - e^{3x} + xe^{-x}$

41) $y'' - 2y' - 3y = (x - 2)e^x$ Rpta: $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} + \left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)e^x$

42) $y'' - 5y' + 6y = (x + 1)^2e^{-2x}$

Rpta: $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \left(\frac{x^2}{20} + \frac{29}{200}x + \frac{441}{4000}\right)e^{-2x}$

43) $4y'' - 4y' + y = (x - 1)e^{x/2}$

Rpta: $y = e^{x/2}(c_1x + c_2) + x^2\left(\frac{x}{24} - \frac{1}{8}\right)e^{x/2}$

44) $y'' - 2y' + y = (x + 1)e^x$ Rpta: $y = e^x(c_1x + c_2) + x^2\left(\frac{x}{6} + \frac{1}{2}\right)e^x$

45) $y''' + 2y'' = (4x^2 + 6x - 1)e^{2x}$ Rpta: $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} + \frac{x}{4}(x - 1)e^{2x}$

III.- Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1) $y'' + y = 3 \operatorname{sen} 2x + x\cos 2x$ Rpta: $y = c_1\cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \frac{x}{3}\cos 2x - \frac{5}{9}\operatorname{sen} 2x$

2) $y'' + y = \cos x - \operatorname{sen} x$ Rpta: $y = c_1\cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{x}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)$

3) $y'' + 9y = \cos 3x$ Rpta: $y = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2\cos 3x + \frac{x}{6}\operatorname{sen} 3x$

4) $y'' + y' - 6y = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ Rpta: $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} - \frac{1}{104}(5\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$

5) $y'' + 2y' + y = \operatorname{sen} 2x$ Rpta: $y = e^{-x}(c_1 + c_2x) - \frac{1}{25}(3\operatorname{sen} 2x + 4\cos 2x)$

6) $y'' - 4y + 5y = \cos x + \operatorname{sen} x$ Rpta: $y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + \frac{\cos x}{4}$

7) $y^{iv} - y = \operatorname{sen} x - 2\cos x$

Rpta: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4 \operatorname{sen} x + \frac{x}{4}(\cos x + 2\operatorname{sen} x)$

8) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{sen} x$ Rpta: $y = c_1\cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \frac{x}{2}\cos x$

9) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=\cos x$ Rpta: $y=c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen}2x+\dfrac{\cos x}{3}$

10) $\dfrac{d^4y}{dx^4}-2\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=5\operatorname{sen}2x$

Rpta: $y=(c_1+c_2x)e^x+(c_3+c_4x)e^{-x}+\dfrac{\operatorname{sen}2x}{5}$

11) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+9y=4x\operatorname{sen}x$ Rpta: $y=c_1\cos 3x+c_3\operatorname{sen}3x+\dfrac{x}{2}\operatorname{sen}x-\dfrac{\cos x}{8}$

12) $y''+4y'-2y=8\operatorname{sen}2x$

Rpta: $y=c_1e^{-(\sqrt{6}+2)x}+c_2e^{(\sqrt{6}-2)x}-\dfrac{12\operatorname{sen}2x+16\cos 2x}{25}$

13) $y''+y=4x\cos x$ Rpta: $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+x^2\operatorname{sen}x+x\cos x$

14) $y''-2my'+m^2y=\operatorname{sen}(nx)$

Rpta: $y=(c_1+c_2x)e^{mx}+\dfrac{(m^2-n^2)\operatorname{sen}(nx)+2mn\cos nx}{(m^2+n^2)^2}$

15) $y''+a^2y=2\cos(mx)+3\operatorname{sen}(mx),\ m\neq a$

Rpta: $y=c_1\cos(ax)+c_2\operatorname{sen}(ax)+\dfrac{2\cos(mx)+3\operatorname{sen}(mx)}{a^2-m^2}$

16) $4y''+8y'=x\operatorname{sen}x$ Rpta: $y=c_1+c_2e^{-2x}-\left(\dfrac{x}{20}+\dfrac{7}{50}\right)\operatorname{sen}x-\left(\dfrac{x}{10}+\dfrac{1}{50}\right)\cos x$

17) $y''+y=x^2\operatorname{sen}x$ Rpta: $y=\left(c_1+\dfrac{x}{4}-\dfrac{x^3}{6}\right)\cos x+\left(c_2+\dfrac{x^2}{4}\right)\operatorname{sen}x$

18) $y'''-y=\operatorname{sen}x$

Rpta: $y=c_1e^x+e^{-x/2}\left(c_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\dfrac{1}{2}(\cos x-\operatorname{sen}x)$

19) $y''+y=2\cos x,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$ Rpta: $y=\cos x+x\operatorname{sen}x$

21) $y''+4y=\operatorname{sen}x,\ y(0)=y'(0)=1$ Rpta: $y-\cos 2x+\dfrac{1}{3}(\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}x)$

22) $y''+4y=4(\operatorname{sen}2x+\cos 2x),\ y(\pi)=y'(\pi)=2$

Rpta: $y=3\pi\ \cos 2x+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2x+x(\operatorname{sen}2x-\cos 2x)$

23) $y''+4y=-12\operatorname{sen}2x$ Rpta: $Y=A\cos 2x+B\operatorname{sen}2x+3x\cos 2x$

24) $y''+y=-9\cos 2x,\ y(0)=2,\ y'(0)=1$

Rpta: $y=\operatorname{sen}x-\cos x+3\cos 2x$

25) $y''+y=-60\operatorname{sen}4x,\ y(0)=8,\ y'(0)=14$

26) $y''+2y'+2y=-2\cos 2x-4\operatorname{sen}2x,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$

Rpta: $y=e^{-x}\operatorname{sen}x+\cos 2x$

27) $y''+2y+2y=2\operatorname{sen}2x-4\cos 2x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$

Rpta: $y=2e^{-x}\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x$

28) $y''+4y'+5y=8(\operatorname{sen}3x-3\cos 3x),\ y(0)=1,\ y'(0)=-7.$

29) $y''+4y'+3y=4\operatorname{sen}x+8\cos x,\ y(0)=3,\ y'(0)=-1.$

Rpta: $y=3e^{-x}+2\operatorname{sen}x$

30) $y''+y'-2y=-6(\operatorname{sen}2x+3\cos 2x),\ y(0)=2,\ y'(0)=2$

31) $y''+y=2\cos x$ Rpta: $y=c_1\operatorname{sen}x+c_2\cos x+x\operatorname{sen}x$

32) $y''-3y+2y=14\operatorname{sen}2x-18\cos 2x$ Rpta: $y=c_1e^x+c_1e^{2x}+\operatorname{sen}2x+3\cos 2x$

33) $y''+k^2y=\operatorname{sen}(bx),\ k\neq b$ Rpta: $y=c_1\operatorname{sen}(kx)+c_2\cos(kx)+\dfrac{\operatorname{sen}(bx)}{k^2-b^2}$

34) $y'' - 7y' + 6y = \operatorname{sen} x$ Rpta: $y = c_1e^{6x} + c_2e^{x} + \frac{5\operatorname{sen} x + 7\cos x}{74}$

35) $y''+2y'+5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$

Rpta: $y = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x) - \frac{\cos 2x}{2} - 2\operatorname{sen} 2x$

36) $y'' + y + \operatorname{sen} 2x = 0$, $y(\pi) = y'(\pi) = 1$ Rpta: $y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 2x - \frac{\operatorname{sen} x}{3} - \cos x$

37) $y'' - 4y' + 3y = 2\cos x + 4\operatorname{sen} x$ Rpta: $y = c_1e^{x} + c_2e^{3x} + \cos x$

38) $y''' - y'' + y' - y = 4\operatorname{sen} x$

Rpta: $y = c_1e^x + (c_2 + x)\cos x + (c_3 - x)\operatorname{sen} x$

39) $y'' + y = 2\cos x$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ Rpta: $y = (c + x)\operatorname{sen} x$

40) $y'' - 4y' + 3y = 20\cos x$

Rpta: $y = c_1e^{x} + c_2e^{3x} + 2\cos x - 4\operatorname{sen} x$

IV.- Resovler las siguientes ecuaciones diferenciales.

1) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}\operatorname{sen} x$ Rpta: $y = c_1 + c_2e^{3x} - \frac{3}{5}e^{2x}\operatorname{sen} x - \frac{e^{2x}}{5}\cos x$

2) $4y'' - 5y' + y = e^x(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$

Rpta: $y = c_1e^{x} + c_2e^{x/4} + \frac{e^x}{146}(-11\operatorname{sen} 2x + 5\cos 2x)$

3) $y''' + y'' - 2y = e^x(2\cos x + x\operatorname{sen} x)$

Rpta: $y = c_1e^{x} + e^{-x}(c_2\cos x + c_3\operatorname{sen} x) - \frac{xe^{-x}}{2}\operatorname{sen} x$

4) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\operatorname{sen} x$ Rpta: $y = e^{-2x}(c_1x + c_2) - e^{-2x}\operatorname{sen} x$

5) $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\cos x$ Rpta: $y = e^{-2x}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x) + \frac{xe^{-2x}}{2}\operatorname{sen} x$

6) $y'' - 2y' + 2y = e^x\cos x$ Rpta: $y = e^{x}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x) + \frac{xe^{x}}{2}\operatorname{sen} x$

7) $y''' + 4y'' - 12y' = 8e^{2x}\cos x \,.\, \operatorname{sen} x$

Rpta: $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-6x} - \frac{1}{68}e^{2x}(5\operatorname{sen} 2x + 3\cos 2x)$

8) $y'' + 2y' + y = e^x\cos x$ Rpta: $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{e^x}{25}(3\cos x + 4\operatorname{sen} x)$

9) $y'' + 2y' + 5y = e^x\operatorname{sen} 2x$

Rpta: $y = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x) - \frac{xe^{-x}}{4}\cos 2x$

10) $y'' - y' = e^x\operatorname{sen} x$ Rpta: $y = c_1 + c_2e^{x} - \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$

11) $y'' + 2y' + y = x^2e^x\cos x$

Rpta: $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}(-x^2\cos x + 4x\operatorname{sen} x + 6\cos x)$

12) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x\cos 2x$ Rpta: $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x - \frac{e^x}{8}\operatorname{sen} 2x$

V.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1) $y'' + 9y = x^2e^{3x} + 6$

Rpta: $y = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{18}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right)e^{3x} + \frac{2}{3}$

2) $y'' + 2y' = 3 + 4\operatorname{sen} 2x$ Rpta: $y = c_1 + c_2e^{-2x} + \frac{3x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$

3) $y'' + 4y = x^2 + 3e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

Rpta: $y = \frac{7}{10}\operatorname{sen}2x - \frac{19}{40}\cos 2x + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^x$

4) $y''-2y'+y = xe^x + 4$, $y(0) = y'(0) = 1$ Rpta: $y = 4xe^x - 3e^x + \frac{x^3}{6}e^x + 4$

5) $2y''+3y'+y = x^2 + 3\operatorname{sen}x$

Rpta: $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-x/2} + (x^2 - 6x + 14) - \frac{3}{10}\operatorname{sen}x - \frac{9}{10}\cos x$

6) $y''+y'+y = \operatorname{sen}^2 x$

Rpta: $y = c_1e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}2x}{13} + \frac{3\cos 2x}{26}$

7) $y''+y'+y = 2\operatorname{senh}x$

Rpta: $y = c_1e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{15}}{2}x + c_2e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{15}}{2}x + \frac{e^x}{6} - \frac{e^{-x}}{4}$

8) $y''-y'-2y = \cosh 2x$ Rpta: $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + \frac{xe^{2x}}{6} + \frac{e^{-2x}}{8}$

9) $y''+2y'+5y = e^{-x}(2x + \operatorname{sen}2x)$

Rpta: $y - e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen}2x) - \frac{xe^{-x}}{4}.\cos 2x + \frac{x}{2}e^{-x}$

10) $y^{v} - y^{iv} = xe^x - 1$ Rpta: $y = \frac{x^4}{24} + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 + \left(\frac{x^2}{2} - 4x + c_5\right)e^x$

11) $y'''-4y' = xe^{2x} + \operatorname{sen}x + x^2$

Rpta: $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} + \frac{\cos x}{5} - \frac{x^3}{12} - \frac{x}{8} + \frac{e^{2x}}{2}(2x^2 - 3x)$

12) $y''+2y'+2y = e^{-x}\cos x + xe^{-x}$

Rpta: $y = \frac{x}{2}e^{-x}\operatorname{sen}x + xe^{-x} + e^{-x}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen}x)$

13) $y^{iv} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{\cos x}{2}$

Rpta: $y = \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{4}\right)e^x + (c_1 + c_2x)e^{-x} + \left(c_3 - \frac{x}{8}\right)\cos x + c_4\operatorname{sen}x$

14) $y''+y' = \cos^2 x + e^x + x^2$

Rpta: $y = c_1 + c_2e^{-x} + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right) + \frac{e^x}{2} + \frac{\operatorname{sen}x}{20} - \frac{\cos 2x}{10}$

15) $y^{v} + 4y''' = e^x + 3\operatorname{sen}2x + 1$

Rpta: $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\cos 2x + c_5\operatorname{sen}2x + \frac{e^x}{5} + \frac{x^3}{24} + \frac{3x}{32}\operatorname{sen}2x$

16) $y''-y' = x^2 - e^{-x} + e^x$ Rpta: $y = c_1 + c_2e^{-x} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + xe^{-x} + \frac{x}{2}$

17) $y''-3y' = 1 + e^x + \cos x + \operatorname{sen}x$

Rpta: $y = c_1 + c_2e^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{e^x}{2} + \frac{\cos x - 2\operatorname{sen}x}{5}$

18) $y''-4y' = 4x + \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x$

Rpta: $y = (c_1 + c_2x)e^x + x + 1 + \frac{1}{25}(4\cos x + 3\operatorname{sen}x) + \frac{\cos 2x}{8}$

19) $y''-4y'+5y = 1 + \cos^2 x + e^{2x}$

Rpta: $y = (c_1\cos x + c_2\operatorname{sen}x + 1)e^{2x} + \frac{3}{10} + \frac{\cos 2x}{130} - \frac{4\operatorname{sen}2x}{65}$

20) $y'''-2y'+4y = e^x\cos x + x^2 + \operatorname{sen}2x$

Rpta: $y = c_1e^{-2x} + (c_2\cos x + c_3\operatorname{sen} x)e^x + \frac{1}{8}(2x^2+2x+1) + \frac{1}{40}(\operatorname{sen}2x + 3\cos 2x) + \frac{xe^x}{20}(3\operatorname{sen}x - \cos x)$

21) $y''+2y' = 3+4\operatorname{sen}2x$ Rpta: $y = c_1 + c_2e^{-2x} + \frac{3x}{2} - \frac{\operatorname{sen}2x}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$

22) $y''-2y'+y = xe^x + 4$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$

Rpta: $y = 4xe^x - 3e^x + \frac{x^3e^x}{6} + 4$

23) $2y''+3y'+y = x^2 + 3\operatorname{sen}x$ Rpta: $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{e^x}{25}(3\cos x + 4\operatorname{sen}x)$

24) $y''-8y'+15y = (15x^2+14x+1) + e^x$

Rpta: $y = c_1e^{3x} + c_2e^{5x} + (x+1)^2 + \frac{e^x}{8}$

25) $y'''+4y'+4y = e^{-2x} + 8(x+1)$ Rpta: $y = c_1 + e^{-2x}(c_2x + c_3) + x^2 - \frac{x^2e^{-2x}}{4}$

26) $y^{iv} - y''' + y'' = 12x^2 - 24x + e^{-x}$

Rpta: $y = c_1 + c_2x + e^{x/2}\left[c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + (x^4 - 12x^2) + \frac{e^{-x}}{3}$

27) $y^{iv} - 8y'' + 16y = x\operatorname{senh}x(2x)$

Rpta: $y = e^{2x}(c_1x + c_2) + e^{-2x}(c_3x + c_4) + x^2e^{2x}\left(\frac{x}{192} - \frac{1}{128}\right) - x^3e^{-2x}\left(\frac{x}{192} + \frac{1}{128}\right)$

28) $y''' - y' = (x+e^x)^2$

Rpta: $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + \frac{e^{2x}}{6} - x\left(\frac{x^2}{3} + 2\right) + \frac{x}{2}(x-3)e^x$

29) $y'''+y''+y'+y = x\cosh(-x)$

Rpta: $y = c_1e^{-x} + c_2\cos x + c_3\operatorname{sen}x + \frac{e^x}{8}(x - 3/2) + \frac{x}{8}(x+2)e^{-x}$

10) $y''' + 2y'' + y' = \operatorname{sen}x + 2\cos 2x$

Rpta: $y = c_1 + e^{-x}(c_2x + c_3) - \frac{\operatorname{sen}x}{2} - \frac{1}{25}.(3\operatorname{sen}2x + 4\cos 2x)$

VI.- Dar la forma de la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $y'' - 4y' = x^2e^{2x}$ Rpta: $y_p = xe^{2x}(Ax^2 + Bx + c)$

2) $y'' + 9y = \cos 2x$ Rpta: $y_p = A\cos 2x + B\operatorname{sen}2x$

3) $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sen}2x + e^{2x}$ Rpta: $y_p = A\cos 2x + B\operatorname{sen}2x + cx^2e^{2x}$

4) $y'' + 2y' + 2y = e^x\operatorname{sen}x$ Rpta: $y_p = e^x(A\cos x + B\operatorname{sen}x)$

5) $y'' - 5y' + 6y = (x^2+1)e^x + xe^{2x}$ Rpta: $y_p = e^x(Ax^2 + Bx + c) + xe^{2x}(Dx + E)$

6) $y'' - 2y' + 5y = xe^x\cos 2x - x^2e^x\operatorname{sen}2x$

Rpta: $y_p = xe^x[(Ax^2 + Bx + c)\cos 2x + (Dx^2 + Ex + F)\operatorname{sen}2x]$

7) $y'' + 3y' = 2x^4 + x^2e^{-3x} + \operatorname{sen}3x$

Rpta: $y_p = x(A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x + A_5) + x(B_1x^2 + B_2x + B_3)e^{-3x} + D\operatorname{sen}3x + E\cos 3x$

8) $y'' + y = x(1 + \operatorname{sen}x)$

Rpta: $y_p = A_1x + A_2 + x(B_1x + B_2)\operatorname{sen}x + x(D_1x + D_2)\cos x$

9) $y'' - 5y' + 6y = e^x\cos 2x + e^{2x}(3x+4)\operatorname{sen}x$

Rpta: $y_p = e^x(A\cos 2x + B\operatorname{sen}2x) + (D_1 + D_2x)e^{2x}\operatorname{sen}x + (E_1x + E_2)e^{2x}\cos x$

10) $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} + 2e^{-x}\cos x + 4e^{-x}x^2\operatorname{sen}x$

Rpta: $y_p = Ae^{-x} + x(B_1x^2 + B_2x + B_3)e^{-x}\cos x + x(c_1x^2 + c_2x + c_3)e^{-x}\operatorname{sen}x$

11) $y'' + 3y' + 2y = e^x (x^2 + 1)\text{sen } 2x + 3e^x \cos x + 4e^x$

Rpta: $y_p = (A_1 x^2 + A_2 x + A_3) e^x \text{sen } 2x + (B_1 x^2 + B_2 x + B_3) e^x \cos 2x +$

$+ e^{3x} (D \cos x + E \text{ sen } x) + Fe^x$

12) $y'' + 4y' = x^2 \text{ sen } 2x + (6x + 7) \cos 2x$

Rpta: $y_p = x(A_1 x^2 + A_2 x + A_3) \text{ sen } 2x + (B_1 x^2 + B_2 x + B_3) \cos 2x$

13) $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 4xe^{2x} + x \text{ sen } 2x$

Rpta: $y_p = A_1 x^2 + A_2 x + A_3 + x^2 (B_1 x + B_2) e^{2x} + (c_1 x + c_2) \text{sen } 2x + (D_1 x + D_2).\cos 2x$

14) $y'' - 4y' + 4y = x(2e^{2x} + x \text{ sen } x)$

15) $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 3xe^{-2x} \cos 5x$

16) $y''' - 3y' - 2y = e^x (1 + xe^x)$

17) $y^{iv} + 5y'' + 4y = 2 \cos x$

18) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} (1 + \text{sen } 2x)$

19) $y''' - y'' - y' + y = 2(x + 2e^{-x})$

20) $y''' + 3y'' - 4y = 9xe^{-2x} + 4x$

5.5.- Método de Variación de Parámetro.-

Consideremos una ecuación diferencial no homogénea de coeficientes constante de tercer orden.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a_1 \frac{d^2y}{dx^2} + a_2 \frac{dy}{dx} + a_3 \; y = f(x) \quad ....(1)$$

donde a_1, a_2, a_3 son constantes y $f(x)$ es una función sólo de x ó constante.

Suponiendo que la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

Luego la solución particular de la ecuación (1) es:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$$

donde u_1, u_2, u_3 son funciones incógnitas que satisfacen a las condiciones siguientes.

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_3' y_3' = 0 \\ u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + u_3' y_3'' = f(x) \end{cases} \quad .....(2)$$

La ecuación (2) es un sistema de ecuaciones en u_1', u_2', u_3', el método consiste en:

1^ro^ Escribir la solución general de la ecuación diferencial homogénea.

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

2^do^ Reemplazar c_1, c_2, c_3 por las funciones incógnitas u_1, u_2, u_3 obteniendo la solución particular de la ecuación (1).

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$$

3^ro^ Formar el sistema bajo las condiciones de la ecuación (2).

4^to^ Por medio de integración obtenemos u_1, u_2 y u_3.

a) **Ejemplos.-** Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1.- $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x$

Solución

Hallaremos la solución general de la ecuación homogénea para esto se tiene:

$$p(r) = r^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = i, \; r_2 = -i$$

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x$$

la solución particular de la ecuación diferencial es:

$y_p = u_1 \cos x + u_2 \text{ sen } x$, tal que

$$\begin{cases} u_1' \cos x + u_2' \operatorname{sen} x = 0 \\ u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = \operatorname{cosec}\ x \ \textit{de donde} \end{cases}$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{cosec} x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = -1 \quad \Rightarrow \quad u_1' = -1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \operatorname{cosec} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = c\operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad u_2' = c\operatorname{tg} x \quad \rightarrow \quad u_2 = Ln(\operatorname{sen} x)$$

$$y_p = -x \cos x + \operatorname{sen} x \,.\, Ln(\operatorname{sen} x)$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$y = y_g + y_p = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - x \cos x + \operatorname{sen} x \,.\, Ln(\operatorname{sen} x)$

$$\therefore \ y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - x \cos x + \operatorname{sen} x \,.\, Ln(\operatorname{sen} x)$$

2.- $y'' + 4y = 4\sec^2 x$

Solución

Hallaremos la solución general de la ecuación diferencial homogénea, para esto se tiene:

$p(r) = r^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 2i,\ r_2 = -2i.$

$$y_g = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$$

la solución particular de la ecuación diferencial es:

$y_p = u_1 \cos 2x + u_2 \operatorname{sen} 2x$, tal que

$$\begin{cases} u_1' \cos 2x + u_2' \operatorname{sen} 2x = 0 \\ -2u_1' \operatorname{sen} 2x + 2u_2' \cos 2x = 4\sec^2 x \end{cases} \quad ....(\alpha)$$

reemplazando el sistema (α) se tiene:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 2x \\ 4\sec^2 x & 2\cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{-4\sec^2 x \operatorname{sen} 2x}{2}$$

$$u_1' = -2\sec^2 x.\operatorname{sen} 2x \quad \Rightarrow \quad u_1 = 4Ln(\cos x)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\operatorname{sen} 2x & 4\sec^2 x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{4\sec^2 x.\cos 2x}{2}$$

$$u_2' = 2\sec^2 x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 2 - 2\operatorname{tg}^2 x$$

$$u_2 = 4x - 2\operatorname{tg} x$$

Como $y_p = u_1 .\cos 2x + u_2 \operatorname{sen} 2x$

$$\therefore \quad y_p = 4\cos 2x \,.\, Ln \cos x + (4x - 2\operatorname{tg} x) \operatorname{sen} 2x$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$y = y_g + y_p$$

3.- $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = \sec^2 x$

Solución

Hallaremos la solución general de la ecuación diferencial homogénea, para esto se tiene:

$p(r) = r^2 + 1 = 0 \Rightarrow \quad r_1 = i,\ r_2 = -i.$

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

la solución particular de la ecuación diferencial es $y_p = u_1 \cos x + u_2 \operatorname{sen} x$, donde u_1, u_2 son funciones incógnitas, que cumplen la condición siguiente:

$$\begin{cases} u_1' \cos x + u_2' \operatorname{sen} x = 0 \\ -u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = \sec^2 x \end{cases} \quad \ldots\ldots(\alpha)$$

resolviendo el sistema (α) se tiene:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \sec^2 x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = -\operatorname{tg} x . \sec x \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\sec x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \sec^2 x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = \sec x \quad \Rightarrow \quad u_2 = Ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

Como $y_p = u_1 \cos x + u_2 \operatorname{sen} x$

$$y_p = -1 + \operatorname{sen} x . Ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$$

y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = y_g + y_p$$

4.- $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x . c\operatorname{tg} x$

Solución

Hallaremos la solución general de la ecuación diferencial homogénea, para esto se tiene:

$p(r) = r^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = i,\ r_2 = -i.$

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

la solución particular de la ecuación diferencial es $y_p = u_1 \cos x + u_2 \operatorname{sen} x$, donde u_1, u_2 son funciones incógnitas, que cumplen la condición siguiente:

$$\begin{cases} u_1' \cos x + u_2' \operatorname{sen} x = 0 \\ -u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = \operatorname{cosec} x . c\operatorname{tg} x \end{cases} \quad \ldots\ldots(\alpha)$$

resolviendo el sistema (α) se tiene:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{cosec} x . c\operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = -c\operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad u_1 = -Ln(\operatorname{sen} x)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \operatorname{cosec} x . c\operatorname{tg} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = c\operatorname{tg}^2 x \quad \Rightarrow \quad u_2 = -c\operatorname{tg} x - x$$

Luego $y_p = -\cos x . Ln|\operatorname{sen} x| - (c\operatorname{tg} x + x)\operatorname{sen} x$ y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = y_g + y_p$$

b) Ejercicios Propuestos.-

1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = c\operatorname{tg} x$ Rpta: $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x . Ln|\operatorname{cosec} x - c\operatorname{tg} x|$

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x$ Rpta: $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + \cos x . Ln|\cos x|$

3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4c\operatorname{tg} 2x$

Rpta: $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + \operatorname{sen} 2x . Ln|\operatorname{cosec} 2x - c\operatorname{tg} 2x|$

4) $y''+2y'+2y=e^{-x}\sec x$

Rpta: $y=e^{-x}(c_1+x)\operatorname{sen}x+e^{-x}[c_2+\operatorname{Ln}(\cos x)]\cos x$

5) $y''+4y'+4y=x^{-2}e^{-2x}$ Rpta: $y=e^{-2x}[c_1-1+c_2x-\ln x]$

6) $y''+y=\operatorname{tg}^2 x$ Rpta. $y=y_g+\operatorname{sen}x.\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2\cos x}-1$

7) $y''+y=\sec^2 x.\csc x$ Rpta: $y=y_g-\operatorname{sen}x.\operatorname{Ln}(\csc 2x-\operatorname{ctg}2x)$

8) $y''-2y'+y=e^{2x}(e^x+1)^{-2}$ Rpta: $y=y_g+e^x\operatorname{Ln}(1+e^x)$

9) $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ Rpta: $y=y_g+e^x\operatorname{arctg}(e^{-x})-\dfrac{e^{2x}}{2}Ln(1+e^{-2x})$

10) $y''+y=\sec^3 x$ Rpta: $y=y_g+\dfrac{\sec x}{2}$

11) $y''+y=\operatorname{tg}x$ Rpta: $y=y_g-\cos x.\operatorname{Ln}(\sec x+\operatorname{tg}x)$

12) $y''-y=e^{-2x}\operatorname{sen}(e^{-x})$ Rpta: $y=y_g-\operatorname{sen}e^{-x}-e^x\cos e^{-x}$

13) $y''-3y'+2y=\cos(e^{-x})$ Rpta: $y=y_g-e^{2x}\cos(e^{-x})$

14) $9y''+y=\sec(x/3)$

Rpta: $y=\left[c_1+\dfrac{x}{3}\right]\operatorname{sen}\dfrac{x}{3}+\left[c_2+Ln\left(\cos\dfrac{x}{3}\right)\right]\cos\dfrac{x}{3}$

15) $y''-y=\operatorname{sen}^2 x$ Rpta: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-\dfrac{2}{5}-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{5}$

16) $y''-y=x^2e^{x^2/2}$ Rpta: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+e^{x^2/2}$

17) $y''-2y'+2y=3x+e^x\operatorname{tg}x$

Rpta: $y=(c_1\operatorname{sen}x+[c_2-Ln(\sec x+\operatorname{tg}x)]\cos x)e^x+\dfrac{3x}{2}+\dfrac{3}{2}$

18) $y''+y=x\cos x$ Rpta: $y=\left[c_1+\dfrac{x^2}{4}\right]\operatorname{sen}x+\left(c_2+\dfrac{x}{4}\right)\cos x$

19) $y'''-7y'-6y=26e^{-2x}\cos x$

Rpta: $y=c_1e^{-x}+(c_2+2\operatorname{sen}x+3\cos x)e^{-2x}+c_3e^{3x}$

20) $y''+3y'+2y=\operatorname{sen}(e^x)$ Rpta: $y=c_1e^{-x}+(c_2+\operatorname{sen}e^x)e^{-2x}$

21) $y''+4y=\sec 2x$

Rpta: $y=A\cos 2x+B\operatorname{sen}2x+\dfrac{\cos 2x}{4}.Ln(\cos 2x)+\dfrac{x}{2}\operatorname{sen}2x$

22) $y''+2y'+y=e^{-x}\ln(x)$ Rpta: $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+x^2e^{-x}\left(\dfrac{1}{2}Ln(x)-\dfrac{3}{4}\right)$

23) $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^2}$ Rpta. $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\ln x-e^{-2x}$

24) $y''-2y'+y=-e^x\operatorname{sen}x$ Rpta. $y=(c_1+c_2x)e^x-\cos x.e^x$

25) $y''-4y'+4y=(3x^2+2)e^x$ Rpta. $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+(3x^2+12x+20)e^x$

26) $y'''-y''-y'+y=4xe^x$

Rpta: $y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^x+\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\right)e^x$

27) $y'''-y'=\operatorname{sen}x$ Rpta. $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^x+\dfrac{\cos x}{2}$

28) $y'''-3y''-y'+3y=1+e^x$ Rpta. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}-\dfrac{2}{3}e^{-3x}-e^{-2x}$

29) $y'''-2y''=4(x+1)$

Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}-\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{4}\right)$

30) $y'''-3y'-2y=9e^{-x}$ Rpta. $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3e^{2x}-\dfrac{3x^2}{2}e^{-x}$

31) $y'''-7y'+6y=2\operatorname{sen}x$

Rpta: $c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{-3x}+\dfrac{1}{25}(4\cos x+3\operatorname{sen}x)$

32) $y^{iv}-y=x^2+1$

33) $y'''-y'=\operatorname{sen}x$ Rpta: $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^x+\dfrac{\cos x}{2}$

34) $y^{iv}-y''=2xe^x$ Rpta: $y=c_2+c_3x+c_4e^{-x}+\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{5}{2}x+c_1\right)e^x$

35) $y''-5y'+6y=2e^{x}$ Rpta: $y=y_g+e^{x}$

36) $y''-y'-2y=2e^{-x}$ Rpta: $y=y_g-\dfrac{2x}{3}e^{-x}$

37) $y''+4y=3\csc 2x,\quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}$

Rpta: $y=y_g+\dfrac{3}{4}\operatorname{sen}2x.\,Ln(\operatorname{sen}2x)-\dfrac{3}{2}x\cos 2x$

38) $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^{2}},\quad x>0$ Rpta: $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\ln x-e^{-2x}$

39) $y''+2y'+y=3e^{-x}$ Rpta: $y=y_g+\dfrac{3x^{2}}{2}e^{-x}$

40) $y'''-y'=x$ Rpta: $y=A+Be^{x}+ce^{-x}-\dfrac{x^{2}}{2}$

41) $y''-2y'+y=x^{2}+1$ Rpta: $y=e^{x}(c_1x+c_2)+(x^{2}+4x+7)$

42) $y''-4y'+4y=e^{2x}+e^{-2x}$ Rpta: $y=e^{2x}(c_1x+c_2)+\dfrac{e^{-2x}}{16}+\dfrac{x^{2}}{2}e^{2x}$

43) $y'''-2y''-3y'=9(x+1)$ Rpta: $y=c_1+c_2e^{3x}+c_3e^{-x}-\dfrac{x}{2}(3x+2)$

44) $y'''+2y''-y'=\cosh(x)$ Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{-2x}+\dfrac{x}{12}e^{x}-\dfrac{x}{4}e^{-x}$

45) $y''-8y'+12y=4x\operatorname{senh}2x$

Rpta: $y=c_1e^{2x}+c_2e^{6x}-\dfrac{x}{8}(2x+1)-\dfrac{1}{128}(8x+3)e^{-2x}$

46) $y'''+y''-y'-y=\operatorname{senh}x$

Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3xe^{-x}+\dfrac{x}{8}e^{x}+\dfrac{x^{2}}{8}e^{-x}$

47) $y''+5y'+6y=(x+1)^{2}$ Rpta: $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}-\dfrac{1}{1.8}(18x^{2}+6x+7)$

48) $y''+4y'-5y=12\cos h\,x$ Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{-5x}+xe^{x}-\dfrac{3}{4}e^{-x}$

49) $y'''-2y''-y'+2y=(x+1)^{2}$

Rpta: $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3e^{2x}+\dfrac{1}{4}(2x^{2}+6x+9)$

50) $y'''+3y''-y'-3y=e^{x}+e^{-3x}$ Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{-3x}+\dfrac{x}{8}e^{x}+\dfrac{x}{8}e^{-3x}$

51) $y'''-3y''+3y'-y=e^{x}+1$ Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3x^{2}e^{x}+\dfrac{x^{3}e^{x}}{6}$

52) $y''+2y'+2y=\operatorname{sen}2x+\cos 2x,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$

Rpta: $y=e^{-x}+(\dfrac{3}{10}\cos x+\dfrac{11}{10}\operatorname{sen}x)+\dfrac{\operatorname{sen}2x}{10}-\dfrac{3}{10}\cos 2x$

53) $y''-y'-2y=e^{3x},\ y(0)=1,\ y'(0)=2$ Rpta: $y=\dfrac{e^{-x}}{12}+\dfrac{2e^{2x}}{3}+\dfrac{e^{3x}}{4}$

54) $y''+2y'-3y=1+x\,e^{x}$ Rpta: $y=y_g+\dfrac{1}{16}(2x^{2}-x)e^{x}-\dfrac{1}{3}$

55) $y''+4y=3x\cos 2x$ Rpta: $y=y_g+Ax\cos 2x+Bx\operatorname{sen}2x$

56) $y''+y'-2y=2x-40\cos 2x$ Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}-\dfrac{x}{2}\cos x$

57) $y''+3y'+2y=1+3x+x^{2}$ Rpta: $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\dfrac{x^{2}}{2}$

58) $y'''+y''-4y'-4y=3e^{-x}-4x-6$ Rpta: $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+(c_3-x)e^{-x}+x+\dfrac{1}{2}$

5.6.- Ecuaciones Diferenciales de Euler

Las ecuaciones diferenciales de Euler son de la forma:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 \ y = 0 \ldots\ldots (\alpha)$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes.

Para resolver la ecuación diferencial (α) se transforma a una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes, mediante la sustitución.

$x = e^t \Rightarrow t = \text{Ln } x$, además $\frac{dx}{dt} = e^t$

también $\frac{dy}{dt} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$ de donde

$$\frac{dy}{dt} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = e^{-t} \frac{dy'}{dt} = e^{-t} \frac{d}{dt}\left(e^{-t} \frac{dy}{dt}\right)$$

$\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-t}\left(e^{-t} \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 y}{dt^2}\right)$ de donde

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

en la misma forma se hace los cálculos si la ecuación diferencial es de orden 3, 4, etc.

También son ecuaciones diferenciales de Euler las ecuaciones de la forma siguiente:

$$a_n (ax+b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} (ax+b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots$$

$$\ldots + a_1 (ax+b) \frac{dy}{dx} + a_0 \ y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Para obtener la solución de la ecuación diferencial (β) se transforma en forma similar al caso anterior mediante la sustitución:

$ax + b = e^t \Rightarrow t = \text{Ln}(ax + b)$

Además $\frac{dx}{dt} = \frac{e^t}{a}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = ae^{-t} \frac{dy}{dt}$ de donde se tiene $\frac{dy}{dt} = ae^{-t} \frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = ae^{-t} \frac{dy'}{dt} = ae^{-t} \frac{d}{dt}\left(ae^{-t} \frac{dy}{dt}\right) = a^2 e^{-t}\left(e^{-t} \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 y}{dt^2}\right)$$

de donde:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 e^{-2t}\left[\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

Las ecuaciones diferenciales no homogéneas de Euler son de la forma:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 \ y = x^{\alpha} P_m(Ln(x)) \ldots\ldots (\gamma)$$

donde m es el grado de $P_m(\text{Ln}(x))$

Para resolver la ecuación diferencial (γ) se transforma en forma similar a los casos anteriores.

Ejemplos.- Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1.- $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$

Solución

Sea $x = e^t \Rightarrow t = \text{Lnx}$, además.

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

reemplazando en la ecuación diferencial.

$$e^{2t}.e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+e^{t}.e^{-t}\frac{dy}{dt}-y=0, \text{ simplificando}$$

$\frac{d^2y}{dt^2}-y=0$, ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes.

Sea $P(r)=r^2-1=0 \Rightarrow r_1=1, r_2=-1$.

Luego la solución es $y(t)=c_1e^{t}+c_2e^{-t}$

$$\therefore \quad y=c_1x+\frac{c_2}{x}$$

2.- $(x+2)^2y''+3(x+2)y'-3y=0$

Solución

Sea $x+2=e^{t} \rightarrow t=\text{Ln}(x+2)$ además:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt};\quad \frac{d^2y}{dt^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$e^{2t}.e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+3e^{t}.e^{-t}\frac{dy}{dt}-3y=0$$

de donde al simplificar se tiene:

$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dx}-3y=0$, que es una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes:

Sea $P(r)=r^2+2r-3=0$, de donde: $r_1=-3$, $r_2=1$. Luego la solución es:

$y(t)=c_1e^{-3t}+c_2e^{t}$

$$\therefore \quad y=\frac{c_1}{(x+2)^3}+c_2(x+2)$$

3.- $x^2y''+xy'+y=x(6-\text{Ln}\,x)$

Solución

Sea $x=e^{t} \rightarrow t=\text{Ln}(x)$ además:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt};\quad \frac{d^2y}{dt^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$e^{2t}.e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+e^{t}.e^{-t}\frac{dy}{dt}+y=e^{t}(6-t)$$

al simplificar se tiene:

$\frac{d^2y}{dt^2}+y=(6-t)e^{t}$, ecuación diferencial no homogénea de coeficientes constantes:

Sea $P(r)=r^2+1=0$, de donde: $r_1=i$, $r_2=-i$

Luego la solución complementaria es:

$y_g=c_1\cos t+c_2\,\text{sen}\,t$ y la colución particular es:

$y_p=(At+B)e^{t} \rightarrow y'_p=Ae^{t}+(At+B)e^{t}$

$y''_p=2Ae^{t}+(At+B)e^{t}$

como $\frac{d^2y}{dt^2}+y=(6-t)e^{t}$ entonces

$2Ae^{t}+2(At+B)e^{t}+(At+B)e^{t}=(6-t)e^{t}$

$2At+2A+2B=6-t \rightarrow A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{7}{2}$

Luego $y_p = -\frac{t}{2}+\frac{7}{2}$, y la solución general es:

$$y(t) = y_g + y_p = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \frac{t}{2}+\frac{7}{2}$$

$$\therefore \quad y = c_1 \cos(Ln\ x) + c_2 \operatorname{sen}(Ln\ x) - \frac{1}{2}(Ln\ x - 7)$$

4.- $(2x+1)^2 y''' + 2(2x+1)y'' + y' = 0$

Solución

Sea $2x + 1 = e^t \rightarrow t = Ln\,(2x+1)$, además:

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{-t}\frac{dy}{dt};\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial dada:

$$e^{2t}.8e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)+2e^t.4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+2e^{-t}\frac{dy}{dt}=0$$

$$8e^{-t}\left[\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right]+8e^{-t}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]+2e^{-t}\frac{dy}{dt}=0$$

$$4\left[\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right]+4\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]+\frac{dy}{dt}=0$$

$$4\frac{d^3y}{dt^3}-8\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}=0$$

Sea $P(r) = 4r^3 - 8r^2 + 5r = 0$, de donde:

$r_1 = 0,\ r_2 = 1+\frac{i}{2},\ r_3 = 1-\frac{i}{2}$

y la solución general de esta ecuación es:

$$y(t) = c_1 + c_2e^t\cos\frac{t}{2} + c_3e^t\operatorname{sen}\frac{t}{2}$$

$$\therefore \quad y = c_1 + c_2(2x+1)\cos\left(\frac{\ln(2x+1)}{2}\right) + c_3(2x+1)\operatorname{sen}\left(\frac{\ln(2x+1)}{2}\right)$$

b. Ejercicios Propuestos.-

Resolver los siguientes ejercicios:

1) $x^2y''+2xy'-2y=0$ Rpta: $y = c_1|x| + c_2|x|^{-2}$

2) $x^2y''+xy'+9y=0$ Rpta: $y = c_1 \operatorname{sen}(3\,Ln|x|) + c_2\cos(3\,Ln|x|)$

3) $4x^2y''-8xy'+9y=0$ Rpta: $y = c_1x^{3/2} + c_2x^{3/2}\ln x$

4) $x^2y''-3xy'+7y=0$ Rpta: $y = c_1x^2\cos\sqrt{3}\ln x + c_2x^2\operatorname{sen}\sqrt{3}\ln x$

5) $x^2y''+xy'-p^2y=0$, p es una constante. Rpta: $y = c_1|x|^p + c_2|x|^{-p}$, $p \neq 0$

6) $x^3y'''-2x^2y''-17xy'-7y=0$ Rpta: $y = |x|^{-1}(c_1 + c_2\,Ln|x|) + c_3|x|^7$

7) $x^3y'''+4x^2y''-2y=0$ Rpta: $y = c_1|x|^{-1} + c_2|x|^{\sqrt{2}} + c_3|x|^{-\sqrt{2}}$

8) $2x^2y''+xy'-y=0$ Rpta: $y = c_1x + \frac{c_2}{\sqrt{x}}$

9) $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$ Rpta: $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$

10) $x^3y'''+4x^2y''-8xy'+8y=0$

11) $x^2y''+3xy'+y=0$ Rpta: $y = \frac{1}{x}(c_1 + c_2Ln|x|)$

12) $x^2y''+2xy'+6y=0$

Rpta: $y = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}Ln(x)\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{2}Ln(x)\right)\right]$

13) $xy''+y'=0$ Rpta: $y = c_1 + c_2\,Ln|x|$

14) $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$

Rpta: $y = c_1(2x+1) + c_2(2x+1)\,\text{Ln}(2x+1)$

15) $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$ Rpta: $y = c_1 + c_2x^2 + c_3x^4$

16) $(x+1)^2y''' - 12y' = 0$ Rpta: $y = c_1 + \dfrac{c_2}{(x+1)^2} + c_3(x+1)^5$

17) $y'' + \dfrac{4y'}{x} + \dfrac{2}{x^2}y = 0$ Rpta: $y = \dfrac{c_1}{x} + \dfrac{c_2}{x^2}$

18) $y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{y}{x^2} = 0$ Rpta: $y = x(c_1\,\text{Ln}(x) + c_2)$

19) $y'' + \dfrac{5}{x}y' + \dfrac{5}{x^2}y = 0$ Rpta: $y = \dfrac{1}{x^2}\left[c_1\cos(Ln(x)) + c_2\,\text{sen}(Ln(x))\right]$

20) $9y'' + \dfrac{3}{x}y' + \dfrac{y}{x^2} = 0$ Rpta: $y = x^{1/3}(c_1\,\text{Ln}(x) + c_2)$

21) $y'' + \dfrac{4}{x}y' + \dfrac{3}{x^2}y = 0$ Rpta: $y = x^{-3/2}\left[c_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}Ln(x)\right) + c_2\,\text{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}Ln(x)\right)\right]$

22) $y''' + \dfrac{4}{x}y'' + \dfrac{8y'}{x^2} + \dfrac{y}{x^3} = 0$ Rpta: $y = c_1x^{-1}\,c_2\cos(\text{Ln}(x)) + c_3\,\text{sen}(\text{Ln}(x))$

23) $y''' + \dfrac{4y''}{x} + \dfrac{y'}{x^2} + \dfrac{y}{x^3} = 0$ Rpta: $y = c_1x + x^{-1}(c_2\,\text{Ln}(x) + c_3)$

24) $y''' + \dfrac{y'}{x^2} - \dfrac{y}{x^3} = 0$ Rpta: $y = x\left[c_1(\text{Ln}(x))^2 + c_2\,\text{Ln}(x) + c_3\right]$

25) $y''' + \dfrac{3y''}{x} + \dfrac{y'}{x^2} + \dfrac{y}{x^3} = 0$

Rpta: $y = c_1x^{-1} + x^{1/2}\left[c_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}Ln\ x\right) + c_2\,\text{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}Ln\ x\right)\right]$

26) $y'' + \dfrac{5}{x-1}y' + \dfrac{4}{(x-1)^2}y = 0$ Rpta: $y = (x-1)^{-2}\left[c_1\ \text{Ln}(x-1) + c_2\right]$

27) $y'' + \dfrac{7y'}{x-2} + \dfrac{12y}{(x-2)^2} = 0$

Rpta: $y = x^{-3}\left[c_1\cos(\sqrt{3}Ln(x-2)) + c_2\,\text{sen}(\sqrt{3}Ln(x-2))\right]$

28) $4y'' + \dfrac{y}{(x-a)^2} = 0$ Rpta: $y = \sqrt{x-a}\left[c_1Ln(x-a) + c_2\right]$

29) $y'' + \dfrac{y'}{x+a} - \dfrac{8y}{(x+a)^2} = 0$ Rpta: $y = c_1(x+a)^4 + c_2(x+a)^{-2}$

30) $y''' + \dfrac{3y''}{x+a} + \dfrac{y'}{(x+a)^2} - \dfrac{y}{(x+a)^3} = 0$

Rpta: $y = c_1(x+a) + (x+a)^{-1/2}\left[c_2\cos\left(\dfrac{3}{2}Ln(x+a)\right) + c_3\,\text{sen}\left(\dfrac{3}{2}Ln(x+a)\right)\right]$

31) $x^2y'' + xy' - 9y = x^3 + 1$

32) $x^2y'' - xy' + y = 2x$ Rpta: $y = x\left[c_1 + c_2\,\text{Ln}(x) + c_3\,\text{Ln}^2(x)\right]$

33) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\,\text{Ln}\,x$ Rpta: $y = \dfrac{c_1}{x} + \dfrac{c_2}{x^2} + Ln\ x - \dfrac{3}{2}$

34) $x^2y'' - xy' - 3y = -\dfrac{16\ Ln\ x}{x}$ Rpta: $y = \dfrac{1}{x}(c_1 + c_2x^4 + Ln(x) + 2Ln^2(x))$

35) $x^2y'' + xy' + 9y = \text{sen}(\text{Ln}\,x^3)$ Rpta: $y = y_g - \dfrac{1}{6}(Ln(x))\cos(Ln\ x^3)$

36) $x^2y''' + xy'' + 4y' = 1 + \cos(2\,\text{Ln}\,x)$

37) $x^3y''' + 4x^2y'' + xy' + y = x$ Rpta: $y = y_g + \frac{x}{2}$

38) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\,Ln^2 x + 12x$

Rpta: $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + Ln^2 x - 3Ln\ x + 2x + 7$

39) $x^2y'' + xy' - y = x^m$, $|m| \neq 1$ Rpta: $y = \frac{x^m}{m^2 - 1} + c_1 x + \frac{c_2}{x}$

40) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2$

Rpta: $y = c_1 x + c_2 x^2 + 1 + (x^2 + 2x)\,Ln\,x$

41) $x^2 \frac{dy}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0$ Rpta: $y = c_1 x + \frac{c_2}{x^2}$

42) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x^2} = xLn(x)$ Rpta: $y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{x^3}{2}(Ln(x)) - \frac{3x^3}{4}$

43) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ Rpta: $y = c_1 x + c_1 x^2$

44) $x^2y'' - 6y = 0$ Rpta: $y = c_1 x^3 + c_2 x^{-2}$

45) $x^2 y'' + \frac{y}{4} = 0$ Rpta: $y = (c_1 + c_2 Ln(x))\sqrt{x}$

46) $x^2y'' - xy' + y = 0$ Rpta: $y = [c_1 + c_2\ Ln\,(x)]x$

47) $x^2 y'' - xy' + \frac{3}{4}y = 0$

48) $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$ $y(1) = 4$, $y'(1) = 13$ Rpta: $y = x + 3x^4$

49) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$ $y(1) = 0$, $y'(1) = -2$ Rpta: $y = x - x^3$

50) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$ Rpta: $y = (1 + Ln(x))x^2$

51) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$

52) $xy''' + 3y'' = 0$

53) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ Rpta: $y = \frac{c_1}{x} + c_2 x + c_3 x^2$

54) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$ Rpta: $y = (c_1 + c_2 Lnx)\frac{1}{x}$

55) $y'' = \frac{2y}{x^2}$ Rpta: $y = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x}$

56) $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$ Rpta: $y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + \frac{x}{2}$

57) $(1 + x)^2y'' + 3(1 + x)y' + 4y = (1 + x)^3$

Rpta: $y = (x + 1)^2\,[c_1 + c_2\,Ln(x + 1)] + (x + 1)^2$

58) $x^2y'' + xy' + 4y = 0$

Rpta: $y = c_1 \cos(2\,Ln\,(x) + c_2\,sen(2 + Ln\,(x))$

59) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ Rpta: $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$

60) $(x - 1)^2y'' + 8(x - 1)y' + 12y = 0$ Rpta: $y = c_1 (x - 1)^{-3} + c_2 (x - 1)^{-4}$

61) $2x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

Rpta: $y = c_1|x|^{3/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} Ln|x|\right) + c_2|x|^{3/2}\,sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2} Ln|x|\right)$

62) $(x - 2)^2y'' + 5(x - 2)y' + 8y = 0$

Rpta: $y = c_1 (x - 2)^{-2} \cos(2\,Ln\,|x-2|) + c_2 (x - 2)^{-2}\,sen(2\,Ln\,|x - 2|)$

63) $x^2y'' + 7xy' + 5y = x$ Rpta: $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-5} + c_2 x^{-5} + \frac{x}{12}$

64) $x^2y'' - 3xy' + 4y = Ln\,x$ Rpta: $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 Ln\ x + \frac{1}{4} Ln\ x + \frac{1}{4}$

65) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + 2\,Ln\,x$ Rpta: $y = c_2 x + c_2 x^2 + x^2 Ln\ x + Ln\ x + \frac{3}{2}$

66) $x^2y'' + xy' + 4y = sen\,(Ln\,x)$

Rpta: $y = c_1 \cos(2\ Ln\ x) + c_2 \operatorname{sen}(2\ Ln\ x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(Ln\ x)$

67) $3x^2y'' + 12xy' + 9y = 0$

Rpta: $y = c_1 x^{-3/2} \cos\left(\frac{3}{2} Ln\ x\right) + c_2\ Ln\ x + c_2 x^{-3/2} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2} Ln\ x\right)$

68) $x^2 \frac{d^2y}{dx} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x + \frac{1}{x}$ Rpta: $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2} + \frac{Ln\ x}{x}$

69) $(x+1)^3y'' + 3(x+1)^2y' + (x+1)y = 6\ \text{Ln}\ (x+1)$

Rpta: $y = \frac{c_1 + c_2\ Ln\ (x+1) + Ln^3(x+1)}{x+1}$

70) $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 6x\frac{dy}{dx} - 6y = 0$ Rpta: $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

71) $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 6x\frac{dy}{dx} + 18y = 0$ Rpta: $y = (c_1 + c_2 \ln x)\, x^3 + c_3 x^{-2}$

72) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 4y = 2x\ln x, \quad x > 0$

Rpta: $y = c_1 \operatorname{sen}(\ln x^2) + c_2 \cos(\ln x^2) + \frac{x\ln x^2}{5} - \frac{4x}{25}$

73) $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3$ Rpta: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x + c_3 x^2 + \frac{x^3}{3}$

74) $(2x-3)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 6(2x-3)\frac{dy}{dx} + 12y = 0$ Rpta: $y = c_1 (2x-3) + c_2 (2x-3)$

75) $(3+x)^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3(3+x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (6+2x)\frac{dy}{dx} = 0$

76) $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} - 15y = x^3$

CAPITULO VI

6.- OPERADORES DIFERENCIALES

Supongamos que D denota la diferenciación con respecto a x, D^2 la segunda diferenciación con respecto a x y así sucesivamente es decir, para el entero k positivo.

$$D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}$$

Luego a la expresión:

$$L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$$

se le llama OPERADOR DIFERENCIAL DE ORDEN "n"; y es tal que, al aplicarse a cualquier función "y" produce el resultado siguiente:

$$\{L(D)\}(y) = a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} Dy + a_n y$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ pueden ser funciones de x ó constantes.

Observación.- Dos operadores L_1 y L_2 son iguales si y sólo si producen el mismo resultado sobre alguna función.

es decir:

$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow L_1(y) = L_2(y)$$

Observación.- $(L_1 . L_2)y = L_1(L_2(y))$, y si los operadores L_1 y L_2 tienen coeficientes constantes entonces se cumple.

$$L_1 . L_2 = L_2 . L_1$$

6.1. Leyes Fundamentales de Operadores.-

1.- $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$
2.- $(L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3)$
3.- $(L_1 . L_2) . L_3 = L_1 . (L_2 . L_3)$
4.- $L_1 . (L_2 + L_3) = L_1 . L_2 + L_1 L_3$
5.- Si $m,\ n \in Z^+ \Rightarrow D^{m+n} = D^m . D^n$

6.2. Propiedades.-

Sean m, n, r, k constantes reales r, k $\in z^+$, entonces se cumple

1^{ro} $D^k(e^{rx}) = r^k e^{rx}$

ahora deduciremos el efecto de un operador L sobre e^{mx}.

para esto, Sea: $L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$

$$\Rightarrow \{L(D)\}(e^{mx}) = a_0 D^n e^{mx} + a_1 D^{n-1} e^{mx} + \ldots + a_{n-1} D e^{mx} + a_n e^{mx}$$

$$= a_0 m^n e^{mx} + a_1 m^{n-1} e^{mx} + \ldots + a_{n-1} m e^{mx} + a_n e^{mx}$$

$$e^{mx}(\underbrace{a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots + a_{n-1} m + a_n}_{L(m)})$$

Es decir: $\{L(D)\}(e^{mx}) = e^{mx} L(m)$

por lo tanto se tiene:

2^{do} $\{L(D)\}(e^{mx}) = e^{mx} L(m)$

Observación.- Si m es raiz de L (m) = 0, entonces $L(D)e^{mx} = 0$

Determinar el efecto del operador $(D-m)^k$ sobre $x^k e^{mx}$, es decir:

$$(D-m)(x^k e^{mx}) = kx^{k-1} e^{mx} + mx^k e^{mx} - mx^k e^{mx}$$

$$= kx^{k-1} e^{mx}$$

$$(D-m)^2(x^k e^{mx}) = k(k-1)x^{k-2} e^{mx}$$
$$(D-m)^3(x^k e^{mx}) = k(k-1)(k-2)x^{k-3} e^{mx}$$

.

.

$$(D-m)^k(x^k e^{mx}) = k!e^{mx} = e^{mx} D^k x^k$$

por lo tanto:

3^{ro} $(D-m)^k(x^k e^{mx}) = k!e^{mx}$

Observación.- Si , n > k $\Rightarrow (D-m)^n(x^k e^{mx}) = 0$

4^{to} Para cada función con "n" derivandos se cumple:

$$(D-m)^n(e^{mx}u) = e^{mx} D^n u$$

5^{to} Si $L(D) = (D-r)^k \varphi\ (D)$ entonces

$$L(D)(x^k e^{rx}) = (D-r)^k \varphi\ (D)(x^k e^{rx})$$
$$= k!(e^{rx})\varphi\ (D)$$
$$= k!\varphi\ (r)e^{rx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L(D)}.e^{rx} = \frac{x^k e^{rx}}{k!\varphi\ (r)}$$

Ejemplo.- $D(D-2)^3(D+1)y = e^{2x}$

6^{to} si L es un polinomio $\Rightarrow L(D)(e^{rx}u) = e^{rx} L(D+r)u$

Ejemplo.-

$$(D-3)^2(D+1)^3(y) = x^2 e^{2x}$$

6.3.- Métodos Abreviados.-

1^{ro} La ecuación $(D-r)^n y = e^{rx}(b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p)$, $b_p \neq 0$

tiene una solución particular única de la forma: $y_p = x^n e^{rx} R_p(x)$

donde $R_p(x)$ es un polinomio de grado p, dado por:

$$R_p(x) = \frac{b_0}{1.2.3\ldots..n} + \frac{b_1 x}{2.3\ldots..(n+1)} + \ldots + \frac{b_p x^p}{(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+n)}$$

2^{do} La ecuación $(D-r)^n y = e^{sx} Q_p(x)$, $r \neq s, r, s \in$ donde $Q_p(x)$ es un polinomio de grado "p"; tiene una solución particular única de la forma:

$y_p = e^{r_1 x} u$ donde $u = e^{ax}(b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p)$

donde a = s - r y luego aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

3ro La ecuación $(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = R_0$

con R_0 = constante y $a_n \neq 0$; tiene como solución particular a $y_p = \dfrac{R_0}{a_n}$

4to La ecuación $(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_k D^{n-k}) y = R_0$

con R_0 = constante y $a_k \neq 0$; tiene como solución particular a $y_p = \dfrac{R_0 x^k}{a_k}$

5to Aplicamos ahora el operador inverso: $\dfrac{1}{L(D)}$, definido por $\dfrac{1}{L(D)}(L(D))y = y$

ahora si aplicamos este operador a: $(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n) y = b(x)$ se obtiene:

$$y = \frac{1}{L(D)}.(b(x))$$

es decir: $y = \dfrac{1}{D - r_1} \cdot \dfrac{1}{D - r_2} \cdot \dfrac{1}{D - r_3} \ldots \dfrac{1}{D - r_n} b(x) \ldots (*)$

La ecuación (*) se resuelve de acuerdo al siguiente cuadro.

Hacer	Por Resolver	Obtener
$z = \dfrac{1}{D - r_n} b(x)$	$z' - r_n z = b(x)$	$z = e^{r_n x} \int e^{-r_n x} b(x) dx$
$v = \dfrac{1}{D - r_n - 1} z(x)$	$v' - r_{n-1} v = z(x)$	$v = e^{r_{n-1} x} \int e^{-r_{n-1} x} z(x) dx$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$y = \dfrac{1}{D - r_1} w(x)$	$y' - r_1 y = w(x)$	$y = e^{r_1 x} \int e^{-r_1 x} w(x) dx$

Obtenemos

$$y = e^{r_1 x} \int e^{(r_2 - r_1)x} \int e^{(r_3 - r_2)x} \ldots \int e^{(r_n - r_{n-1})x} \int e^{-r_n x)x} b(x)(dx)^n$$

6to Suponiendo que $f(D) = (D - r_1)(D - r_2) \ldots (D - r_n)$ en el cual los factores son todos distintos, entonces existe el desarrollo de fracciones parciales.

$\dfrac{1}{f(D)} = \dfrac{A_1}{D - r_1} + \dfrac{A_2}{D - r_2} + \ldots + \dfrac{A_n}{D - r_n}$, en el que $A_1, \ldots, A_n$ son constantes. Entonces:

$$y = A_1 e^{r_1 x} \int b(x) e^{-r_1 x} dx + A_2 e^{r_2 x} \int b(x) e^{-r_2 x} + \ldots + A_n e^{r_n x} \int e^{-r_n x} b(x) dx$$

al calcular tanto las integrales de 5to, 6to se descartaran las constantes de integración cuando aparecen, de otro modo estariamos calculando la primitiva en vez de la integral particular de la ecuación diferencial.

7to Una integral particular de una ecuación diferencial lineal F(D)(y) = b(x) con coeficientes constante está dado por $\phi_p = \dfrac{1}{F(D)} b(x)$ y para ciertas formas de b(x) se abrevian el cálculo de éste operador.

a) Si $b(x) = e^{\alpha x} \Rightarrow \phi_p = \dfrac{1}{F(D)} e^{\alpha x} = \dfrac{1}{F(\alpha)} e^{\alpha x}$; $F(\alpha) \neq 0$

b) Si $b(x) = \text{sen}(\alpha x + \beta)$ ó $b(x) = \cos(\alpha x + \beta)$ entonces

$\phi_p = \dfrac{1}{F(D^2)} \text{sen}(\alpha x + \beta) = \dfrac{1}{F(-\alpha^2)} \text{sen}(\alpha x + \beta)$; $F(-\alpha^2) \neq 0$

ó $\phi_p = \dfrac{1}{F(D^2)} \cos(\alpha x + \beta) = \dfrac{1}{F(-\alpha^2)} \cos(\alpha x + \beta)$; $F(-\alpha^2) \neq 0$

c) Si $b(x) = x^p \Rightarrow \phi_p = \dfrac{1}{F(D)} x^p = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_p D^p) x^p, a_0 \neq 0$

Obtenido desarrollando $\dfrac{1}{F(D)}$, según potencias crecientes de D y suprimiendo todos los términos

potencias D^p, puesto que $D^n x^p = 0$ para n > p

d) Si $b(x) = e^{\alpha x} R(x) \Rightarrow \phi_p = \dfrac{1}{F(D)} e^{\alpha x} R(x) =$

e) Si $b(x) = x\ R(x) \Rightarrow \phi_p = \frac{1}{F(D)} x\ R(x) = x \frac{1}{F(D)} R(x) - \frac{F'(D)}{(F(D))^2} R(x)$

f) $\frac{1}{F_1(D)F_2(D)} b(x) = \frac{1}{F_1(D)} \cdot \frac{1}{F_2(D)} b(x) \Rightarrow \phi_p \frac{1}{F_1(D)} \left[\frac{1}{F_2(D)} b(x) \right]$

g) $\frac{1}{F(D)} \operatorname{senh}(ax) = \frac{F(-D)}{F(a).F(-a)} \operatorname{senh}(ax)$ si $F(a) \cdot F(-a) \neq 0$

h) $\frac{1}{F(D)} \cosh(ax) = \frac{F(-D)}{F(a).F(-a)} \cosh(ax)$ si $F(a) \cdot F(-a) \neq 0$

i) $\frac{1}{(D^2+a^2)^n} \operatorname{sen} ax = \frac{x^n}{(2a)^n n!} \operatorname{sen}\left(ax - \frac{n\pi}{2}\right)$

j) $\frac{1}{(D^2+a^2)^n} \cos ax = \frac{x^n}{(2a)^n n!} \cos\left(ax - \frac{n\pi}{2}\right)$

Observación:

$$\left.\begin{array}{l} e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x \\ e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \cos \beta x = \dfrac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} \\ \operatorname{sen} \beta x = \dfrac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{\beta x} = \cosh \beta\ x + \operatorname{senh} \beta\ x \\ e^{-\beta x} = \cosh \beta\ x - \operatorname{senh} \beta\ x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{senh} \beta\ x = \dfrac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \\ \cosh \beta\ x = \dfrac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} \end{cases}$$

a) Ejemplos.-

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1.- $(D^4 - 8D^2 + 16)(y) = xe^{2x}$

Solución

$F(D) = D^4 - 8D^2 + 16 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2,\ r_3 = r_4 = -2$

Luego la solución general de la ecuación homogénea es:

$\phi c(x) = (c_1 + c_1 x)e^{2x} + (c_2 + c_3 x)e^{-2x}$

para la solución particular se tiene:

$\phi_p(x) = \frac{1}{F(D)} xe^{2x} = \frac{xe^{2x}}{(D-2)^2(D+2)^2}$ donde

$r_1 = 2,\ r_2 = 2,\ r_3 = -2,\ r_4 = -2$

$\phi_p(x) = e^{r_1 x} \int e^{(r_2 - r_1)x} \int e^{(r_3 - r_2)x} \int e^{(r_4 - r_3)x} \int e^{-r_4 x} b(x)(dx)^4$

$\phi_p(x) = e^{2x} \int e^0 \int e^{-4x} \int e^0 \int e^{2x} xe^{2x} (dx)^4$

$= e^{2x} \iint e^{-4x} \iint xe^{4x} (dx)^4$

$= e^{2x} \iint e^{-4x}.e^{4x}\left(\frac{x}{16} - \frac{3}{32}\right)(dx)^2 = e^{2x} \iint \left(\frac{x}{16} - \frac{3}{32}\right)(dx)^2$

$\phi_p(x) = e^{2x}\left(\frac{x^3}{96} - \frac{3x^2}{64}\right)$

$\therefore y = \phi c(x) + \phi\ p(x) = (c_0 + c_1 x)e^{2x} + (c_3 + c_4 x)e^{-2x} + e^{2x}\left(\frac{x^3}{96} - \frac{3x^2}{64}\right)$

2.- $D(D-1)^3(y) = (x^2 + 2x) = e^x$

Solución

$P(r) = r(r-1)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = r_3 = r_4 = 1$ entonces

$\phi c(x) = c_1 + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2)e^x$

ahora calcularemos la solución particular:

$$\phi p(x)=\frac{1}{D(D-1)^3}(x^2+2x)e^{2x}=\frac{1}{D(D-1)^2}\left[\frac{1}{D-1}(x^2+2x)e^x\right]......(1)$$

haciendo $z=\frac{1}{D-1}(x^2+2x)e^x$ entonces:

$\frac{dz}{dx}-z=(x^2+2x)e^x$ cuya solución es

$$z=e^{-\int -dx}\left[\int e^{\int -dx}(x^2+2x)e^x dx\right]=e^x\int(x^2+2x)dx$$

$$z=\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)e^x \quad \text{reemplazando en (1)}$$

$$\phi p(x)=\frac{1}{D(D-1)^2}\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]e^x=\frac{1}{D(D-1)}\left[\frac{1}{D-1}\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)e^x\right]......(2)$$

Sea $z=\frac{1}{D-1}\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)e^x$ entonces

$\frac{dz}{dx}-z=\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)e^x$, cuya solución es:

$$z=e^{-\int -dx}\left[\int e^{\int -dx}\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)e^x dx\right]=e^x\left[\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3}\right]$$

$$z=e^x\left[\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3}\right] \quad \text{reemplazando en (2)}$$

$$\phi p(x)=\frac{1}{D(D-1)}\left(\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3}\right)e^x=\frac{1}{D}\left[\frac{1}{D-1}\left(\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3}\right)e^x\right]......(3)$$

Sea $z=\frac{1}{D-1}\left(\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3}\right)e^x$ entonces:

$\frac{dz}{dx}-z=\left(\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3}\right)e^x$ cuya solución es:

$$z=e^{-\int -dx}\left[\int e^{\int -dx}\left(\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3}\right)e^x dx\right]=e^x\left(\frac{x^5}{60}+\frac{x^4}{12}\right)$$

$$z=\left(\frac{x^5}{60}+\frac{x^4}{12}\right)e^x \quad \text{reemplazando en (3).}$$

$$\phi_p(x)=\frac{1}{D}\left(\frac{x^5}{60}+\frac{x^4}{12}\right)e^x \Rightarrow \phi_p(x)=\int\left(\frac{x^5}{60}+\frac{x^4}{12}\right)e^x dx$$

$$\phi_p(x)=\frac{x^5}{60}e^x$$

La solución general de la ecuación es:

$$\phi(x)=\phi_c(x)+\phi_p(x)$$

$$\therefore \ \phi(x)=c_1+(c_2+c_3x+c_4x^2)e^x+\frac{x^5}{60}e^x$$

3.- $(D-1)^3(D-2)^3y=x^2e^{3x}$

Solución

Sea $P(r)=(r-1)^3(r-2)^3=0\Rightarrow r_1=1$ de multiplicidad 3

$r_2=2$ de multiplicidad 3

$$y_c=(c_1+c_2+c_3x^2)e^x+(c_4+c_5x+c_6x^2)e^{2x}$$

ahora calcularemos la solución particular.

$$y_p=\frac{1}{(D-1)^3(D-2)^3}x^2e^{3x}=e^{3x}\frac{1}{(D+2)^3(D+1)^3}x^2$$

$$=e^{3x}\frac{1}{(D+2)^3}\left[\frac{1}{D^3+3D^2+3D+1}x^2\right]$$

$$y_p=e^{3x}\frac{1}{(D+2)^3}(1-3D+6D^2)x^2=e^{3x}\frac{1}{(D+2)^3}(x^2-6x+12)$$

$$y_p=e^{3x}\frac{1}{D^3+6D^2+12D+8}(x^2-6x+12)$$

$$y_p=e^{3x}\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{16}D+\frac{3}{16}D^2\right)(x^2-6x+12)$$

$$y_p=e^{3x}\left(\frac{x^2}{8}-\frac{9}{8}x+3\right)$$

La solución general es: $\quad y=y_c+y_p$

4.- $(D^3-4D^2+3D)(y)=x^2$

Solución

Sea $P(r)=r^3-4r+3r=0\Rightarrow r_1=0,\ r_2=1,\ r_3=3$

de donde $\phi_c(x)=c_1+c_2e^x+c_3e^{3x}$

ahora calcularemos la solución particular.

$$\phi_p(x)=\frac{1}{D^3-4D^2+D)}x^2=\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D^2-4D+1}\right)x^2$$

$$\phi_p(x)=\frac{1}{D}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{9}D+\frac{13}{27}D^2\right)x^2=\frac{1}{D}\left(\frac{x^2}{3}+\frac{8x}{9}+\frac{26}{27}\right)$$

$$\phi_p(x)=\frac{x^3}{9}+\frac{4x^2}{9}+\frac{26}{27}x$$

Luego la solución general de la ecuación es:

$$y=c_1+c_2e^x+c_3e^{3x}+\frac{x^3}{9}+\frac{4x^2}{9}+\frac{26}{27}x$$

5.- $(D^2-1)(y)=x^2$

Solución

Sea $P(r)=r^2-1=0\Rightarrow r_1=1,\ r_2=-1$

de donde $\phi_c(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$

calculando la solución particular se tiene:

$$\phi_p(x)=\frac{1}{D^7-1}x^2=(-1-D^2)x^2=-x^2-2$$

Luego la solución general es $\phi(x)=\phi_c(x)+\phi_p(x)$

$$\therefore\ \phi(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}-x^2-2$$

6.- $D^4(D^2-1)(y)=x^2$

Solución

Sea $P(r)=r^4(r^2-1)=0\Rightarrow r_1=0$ multiplicidad 4

y $r_2=1,\ r_3=-1$ de donde

$$\phi_c(x)=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+c_5e^x+c_6e^{-x}$$

ahora calcularemos la solución particular

$$\phi_p(x)=\frac{1}{D^4(D^2-1)}x^2=\frac{1}{D^4}(-1-D^2)x^2=\frac{1}{D^4}(-x^2-2)$$

$$\phi_p(x)=\frac{1}{D^3}(-x^2/3-2x)=\frac{1}{D^2}\left(-\frac{x^4}{12}-x^2\right)=\frac{1}{D}\left(-\frac{x^5}{60}-\frac{x^3}{3}\right)$$

$$\phi_p(x)=-\frac{x^6}{360}-\frac{x^4}{12}$$

y la solución general es $\phi\ (x)=\phi_c(x)+\phi_p(x)$

7.- $(D^4+10D^2+9)(y)=\cos(4x+6)+\text{sen}(2x+3)$

Solución

Sea $P(r)=r^4+10r^2+9=0 \Rightarrow (r^2+1)(r^2+9)=0$

de donde $r_1=i,\ r_2=-i,\ r_3=3i,\ r_4=-3i$ entonces

$y_c=c_1\cos x+c_2\text{ sen }x+c_3\cos 3x+c_4\text{ sen }3x$

calculando la solución particular.

$$y_p=\frac{1}{D^4+10D^2+9}=(\cos(4x+6)+\text{sen}(2x+3))$$

$$y_p=\frac{1}{(D^2+1)(D^2+9)}\cos(4x+6)+\frac{1}{(D^2+1)(D^2+9)}\text{sen}(2x+3)$$

$$y_p=\frac{1}{(-16+1)(-16+9)}\cos(4x+6)+\frac{1}{(-4+1)(-4+9)}\text{sen}(2x+3)$$

$$y_p=\frac{\cos(4x+6)}{105}-\frac{1}{15}\text{sen}(2x+3)$$

y la solución general es $y=y_c+y_p$

8.- $(D^4+3D^3-15D^2-19D+30)(y)=e^{4x}$

Solución

Sea $P(r)=r^4+3r^3-15r^2-19r+30=0$ de donde

$r_1=1,\ r_2=3,\ r_3=-2,\ r_4=-5$ entonces

$y_c=c_1e^x+c_2e^{3x}+c_3e^{-2x}+c_4e^{-5x}$

calculando la solución particular se tiene:

$$y_p=\frac{1}{D^4+3D^3-15D^2-19D+30}e^{4x}$$

$$y_p=\frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)(D+5)}e^{4x}=\frac{1}{(4-1)(4-3)(4+2)(4+5)}e^{4x}=\frac{e^{4x}}{162}$$

Luego la solución general de la ecuación es:

$$y=c_1e^x+c_2e^{3x}+c_3e^{-2x}+c_4e^{-5x}+\frac{e^{4x}}{162}$$

9.- $(D^8+39D^6+138D^4+126D^2+900)(y)=\text{sen}(4x+1)+\cos(6x+2)$

Solución

$P(r)=r^8+39r^6+138r^4+126r^2+900=0$ de donde

$(r^2+1)(r^2+9)(r^2+4)(r^2+25)=0 \Rightarrow$ se tiene

$r_1=i,\ r_2=-i,\ r_3=3i,\ r_4=-3i,\ r_5=2i,\ r_6=-2i.r_7=5i,\ r_8=-5i$

$y_c=c_1\cos x+c_2\text{ sen }x+c_3\cos 3x+c_4\text{ sen }3x+$

$c_5\cos 2x+c_6\text{ sen }2x+c_7\cos 5x+c_8\text{ sen }5x$

ahora calculando la solución particular:

$$y_p=\frac{1}{D^8+39D^6+138D^4+126D^2+900}[\text{sen}(4x+1)+\cos(6x+2)]$$

$$y_{p_1}=\frac{1}{(D^2+1)(D^2+9)(D^2+4)(D^2+25)}\text{sen}(4x+1)+$$

$$+\frac{1}{(D^2+1)(D^2+9)(D^2+4)(D^2+25)}\cos(6x+1)$$

$$y_p=\frac{\operatorname{sen}(4x+1)}{(-16+1)(-16+9)(-16+4)(-16+25)}+$$

$$+\frac{\cos(6x+1)}{(-36+1)(-36+9)(-36+4)(-36+25)}$$

$$y_p=-\frac{1}{11340}\operatorname{sen}(4x+1)+\frac{1}{332640}\cos(6x+1)$$

La solución general es $\phi\ (x)=y_c+y_p$

10) $(D^2+3D+2)(y)=x\cos 2x$

Solución

Sea $P(r)=r^2+3r+2=0\Rightarrow r_1=-1,\ r_2=-2$

entonces $y_c=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

ahora hallaremos la solución particular

$$y_p=\frac{1}{D^2+3D+2}x\cos 2x=x\frac{1}{D^2+3D+2}\cos 2x-\frac{2D+3}{(D^2+3D+2)^2}\cos 2x$$

$$y_p=x\frac{\cos 2x}{D^2+3D+2}-\frac{2D+3}{D^4+6D^3+13D^2+12D+4}\cos 2x$$

$$y_p=x\frac{1}{-4+3D+2}\cos 2x-\frac{2D+3}{(-4)^2+6(-4)D+13(-4)+12D+4}\cos 2x$$

$$y_p=x\frac{1}{3D-2}\cos 2x+\frac{2D+3}{4(3D+8)}\cos 2x$$

$$y_p=x\frac{3D+2}{9D^2-4}\cos 2x+\frac{(2D+3)(3D-8)}{4(9D^2-64)}\cos 2x$$

$$y_p=\frac{x}{-40}(3D+2)\cos 2x+\frac{1}{4}\left(\frac{6D^2-7D-24}{-100}\right)\cos 2x$$

$$y_p=\frac{x}{-20}(3\operatorname{sen}2x-\cos 2x)+\frac{1}{200}(24\cos 2x-7\operatorname{sen}2x)$$

$$\therefore\ \phi\ (x)=y_c+y_p$$

11) $(D^4+8D^2+9)(y)=\cos 3x+e^{2x}$

Solución

Sea $P(r)=r^4+8r^2-9=0\Rightarrow r_1=1,\ r_2=-1,\ r_3=3i, r_4=-3i$

$$\phi_c(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos 3x+c_4\operatorname{sen}3x$$

calculando la solución particular se tiene:

$$\phi_p(x)=\frac{1}{D^4+8D^2-9}(\cos 3x+e^{2x})$$

$$\phi_p(x)=\frac{1}{(D^2+9)(D^2-1)}\cos 3x+\frac{1}{(D^2+9)(D^2-1)}e^{2x}$$

$$\phi_p(x)=\left[\frac{1}{D^2+9}\frac{\cos 2x}{10}\right]+\frac{e^{2x}}{39}$$

pero se observa que $\cos 3x=\operatorname{Re}(e^{3ix})$ entonces

$$\phi_p(x)=-\frac{1}{10(D^2+9)}\cos 3x+\frac{e^{2x}}{39}=-\frac{1}{10}\frac{e^{3ix}}{(D+3i)^2+9}+\frac{e^{2x}}{39}$$

$$\phi_p(x)=-\frac{1}{10}\frac{e^{3ix}}{D^2+6iD}+\frac{1}{39}e^{2x}\Rightarrow a_0(D+6i)=1$$

$$a_0 = \frac{1}{6i}$$

$$\phi_p(x) = \frac{\mathrm{Re}(c^{3ix})}{60i} + \frac{e^{2x}}{39} = x\left(\frac{i\cos 3x - \mathrm{sen}\,3x}{60}\right) + \frac{e^{2x}}{39}$$

$$\phi_p(x) = -\frac{x\,\mathrm{sen}\,3x}{60} + \frac{e^{2x}}{39}$$

Luego la solución general es:

12) $(D+1)(D-2)^3(y) = x^2e^{2x} + xe^x$

Solución

Sea $P(r) = (r+1)(r-2)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ \ r_2 = 2$ multiplicidad 3.

entonces $y_c(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3xe^{2x} + c_4x^2e^{2x}$

calculando la solución particular se tiene:

$$y_p = \frac{1}{(D+1)(D-2)^3}(x^2e^{2x} + xe^x) =$$

$$= \frac{1}{(D+1)(D-2)^2}\left[\frac{1}{D-2}(x^2e^{2x} + xe^x)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Sea $z = \frac{1}{D-2}(x^2e^{2x} + xe^x)$ de donde:

$\frac{dz}{dx} - 2z = x^2e^{2x} + xe^x$, ecuación lineal en z.

$$z = e^{-\int -2dx}\left[\int e^{\int -2dx}(x^2e^{2x} + xe^x)dx\right]$$

$$z = e^{2x}\left[\int e^{-2x}(x^2e^{2x} + xe^x)dx\right]$$

$$z = e^{2x}\int (x^2 + xe^{-x})dx = e^{2x}\left(\frac{x^3}{3} - xe^{-x} - e^{-x}\right)$$

$$z = \frac{x^3}{3}e^{2x} - xe^x - e^{2x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$y_p = \frac{1}{(D+1)(D-2)^2}\left(\frac{x^3}{3}e^{2x} - xe^x - e^{2x}\right) =$$

$$= \frac{1}{(D+1)(D-2)}\left[\frac{1}{D-2}\left(\frac{x^3}{3}e^{2x} - xe^x - e^{2x}\right)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Sea $z = \frac{1}{D-2}\left(\frac{x^3}{3}e^{2x} - xe^x - e^{2x}\right)$ de donde

$\frac{dz}{dx} - 2z = \frac{x^3}{3}e^{2x} - xe^x - e^{2x}$ ecuación en z

$$z = e^{-\int -2dx}\left[\int e^{\int -2dx}\left(\frac{x^3}{3}e^{2x} - ex^x - e^{2x}\right)dx\right]$$

$$z = e^{2x}\left[\int\left(\frac{x^3}{3} - xe^{-x} - 1\right)dx\right] = e^{2x}\left(\frac{x^4}{12} - xe^{-x} - e^{-x} - x\right) \ldots\ldots(4)$$

reemplazando (4) en (3) se tiene:

$$y_p = \frac{1}{(D+1)(D-2)}\left[\frac{x^4}{12}e^{2x} - xe^x - e^x - xe^{2x}\right]$$

$$y_p = \frac{1}{(D+1)}\left[\frac{1}{D-2}\left(\frac{x^4}{12}e^{2x} - xe^x - e^x - xe^{2x}\right)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Sea $z = \frac{1}{D-2}\left(\frac{x^4}{12}e^{2x} - xe^x - e^x - xe^{2x}\right)$ de donde

$$\frac{dz}{dx} - 2z = \left(\frac{x^4}{12} - x\right) e^{2x} - (x+1)e^x \quad \text{ecuación lineal en z}$$

$$z = e^{-\int -2dx}\left[\int e^{\int -2dx}\left[\left(\frac{x^4}{12} - x\right) e^{2x} - (x-1)e^x\right] dx\right]$$

$$z = e^{-2x}\int\left(\frac{x^4}{12} - x - (x+1)e^{-x}\right) dx$$

$$z = \left(\frac{x^5}{60} - \frac{x^2}{2}\right) e^{2x} + (2+x)e^{-x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$y_p = \frac{1}{(D+1)}\left[\left(\frac{x^5}{60} - \frac{x^2}{2}\right) e^{2x} + (x+2)e^{-x}\right]$$

$$\frac{dy_p}{dx} + y_p = \left(\frac{x^5}{60} - \frac{x^2}{2}\right) e^{2x} + (x+2)e^{-x} \quad \text{lineal en z}$$

$$y_p = e^{-\int dx}\left[\int e^{dx}\left[\left(\frac{x^5}{60} - \frac{x^2}{2}\right) e^{2x} + (x+2)e^{-x}\right] dx\right]$$

$$y_p = e^{-x}\left[\int\left[\left(\frac{x^5}{60} - \frac{x^2}{2}\right) e^{3x} + (x+2)e^{2x}\right] dx\right]$$

$$y_p = \left(\frac{x^5}{180}e^{2x} - \frac{x^4}{108} + \frac{x^3}{81}\right) e^{3x} - \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{4}\right)e^x$$

La solución general es $y = y_c + y_p$

13) $(D^2 - 4D + 3)(y) = 100x^4e^{3x} + 340e^x \cos 2x$

Solución

Sea $P(r) = r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3$ entonces

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{3x}$$

calculando la solución particular se tiene:

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4D + 3}(100x^4e^{3x} + 340e^x \cos 2x)$$

$$y_p = \frac{1}{(D-3)(D-1)}(100x^4e^{3x} + 340e^x \cos 2x)$$

$$y_p = 100e^{3x}\frac{1}{(D-3+3)(D-1+3)}x^4 + 340e^x\frac{1}{(D-3+1)(D-1+1)}\cos 2x$$

$$y_p = 100e^{3x}\frac{1}{D(D+2)}x^4 + 340e^x\frac{1}{D(D-2)}\cos 2x$$

$$y_p = 100e^{3x}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{2} - \frac{D}{4}\right) x^4 + 340e^x\frac{1}{D^2 - 2D}\cos 2x$$

$$y_p = 100e^{3x}\frac{1}{D}\left(\frac{x^4}{2} - x^3\right) + 340e^x\left(\frac{1}{-4-2D}\cos 2x\right)$$

$$y_p = 100e^{3x}\int\left(\frac{x^4}{2} - x^3\right) dx - \frac{340e^x}{2}\frac{(D-2)}{D^2-4}\cos 2x$$

$$y_p = 100e^{3x}\left(\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4}\right) - 170e^x\frac{(D-2)}{-4-4}\cos 2x$$

$$y_p = 100e^{3x}\left(\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4}\right) + \frac{65}{4}(D-2)\cos 2x$$

$$y_p = 10x^5e^{3x} - 25x^4e^{3x} - \frac{65}{4}\cos 2x - \frac{65}{4}\operatorname{sen} 2x$$

La ecuación general es

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{3x} + (10x^5 - 25x^4)e^{3x} - \frac{65}{2}(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$$

14) $(D^2 + D + 1)(y) = e^{3x} + 6e^{x} - 3e^{-2x} + 5$

Solución

Sea $P(r) = r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ r_2 = -\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ entonces

$$\phi_c(x) = (c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{-x/2}$$

ahora calcularemos la solución particular

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D^2+D+1}(e^{3x} + 6e^{x} - 3e^{-2x} + 5)$$

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D^2+D+1}e^{3x} + \frac{6e^{x}}{D^2+D+1} - \frac{1}{D^2+D+1}e^{-2x} + \frac{5}{D^2+D+1}$$

$$\phi_p(x) = \frac{e^{3x}}{9+3+1} + \frac{6e^{x}}{1+1+1} - \frac{e^{-2x}}{4-2+1} + 5 = \frac{e^{3x}}{13} + 2e^{x} - \frac{e^{-2x}}{3} + 5$$

$$\phi_p(x) = \frac{e^{3x}}{13} + 2e^{x} - \frac{e^{-2x}}{3} + 5$$

$$\frac{5}{D^2+D+1} = \frac{5e^0}{D^2+D+1} = \frac{5e^0}{0+0+1} = 5$$

Luego la solución general es: $y = \phi_c(x) + \phi_p(x)$

15) $(D^3 + D^2 + D + 1)(y) = e^{x} + e^{-x} + \operatorname{sen} 2x$

Solución

Sea $P(r) = r^3 + r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = i,\ r_3 = -i$ entonces

$$\phi_c(x) = c_1e^{-x} + c_2\cos x + c_3\operatorname{sen} x$$

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D^3+D^2+D+1}(e^{x} + e^{-x} + \operatorname{sen} 2x)$$

entonces:

$$\phi_p(x) = \frac{1}{(D^2+1)(D+1)}e^{x} + \frac{1}{(D^2+1)(D+1)}e^{-x} + \frac{1}{(D^2+1)(D+1)}\operatorname{sen} 2x$$

$$\phi_p(x) = \frac{e^{x}}{4} + \frac{1}{2(D+1)}e^{-x} - \frac{1}{3}\frac{1}{D+1}\operatorname{sen} 2x \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Sea $z = \frac{e^{-x}}{(D+1)} \Rightarrow \frac{dz}{dx} + z = e^{-x}$

cuya solución es:

$$z = e^{-\int dx}\left[\int e^{\int dx}e^{-x}dx\right] = e^{-x}x \Rightarrow z = xe^{-x} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\phi_p(x) = \frac{e^{x}}{4} + \frac{xe^{-x}}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{D-1}{D^2-1}\right)\operatorname{sen} 2x$$

$$\phi_p(x) = \frac{e^{x}}{4} + \frac{xe^{-x}}{2} - \frac{1}{3}\frac{(D-1)}{-5}\operatorname{sen} 2x$$

$$\phi_p(x) = \frac{1}{4}(e^{x} + 2xe^{-x}) + \frac{1}{15}(2\cos 2x - \operatorname{sen} 2x)$$

La solución general es:

$$\phi(x) = \phi_c(x) + \phi_p(x)$$

6.4. Solución de la Ecuación de Euler mediante el operador D.

Para resolver las ecuaciones diferenciales de Euler mediante el operador D, se tiene en cuenta el criterio siguiente:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=D(D-1)y,\quad x^3\frac{d^3y}{dx^3}=D(D-1)(D-2)y$$

generalizando se tiene:

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}=D(D-1)(D-2)\dots(D-n+1);\ n=1,2,\dots,y\ x=e^t$$

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2y''+xy'+y=x$

Solución

$$x^2y''+xy'+y=x\Rightarrow(D(D-1)+D+1)y=e^t$$

$$(D^2+1)y=e^t\Rightarrow y_p=\frac{1}{D^2+1}e^t=\frac{e^t}{2}\Rightarrow y_p=\frac{x}{2}$$

$$y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+\frac{x}{2}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2y''-xy'+y=xLn^3x$

Solución

$x^2y''-xy'+y=xLn^3x$ pasando a operadores

$$(D(D-1)-D+1)y=t^3e^t\Rightarrow(D^2-2D+1)y=t^3e^t$$

cuya solución complementaria es $y_c=c_1e^t+c_2te^t$, $\quad y_c=c_1x+c_2x\,Lnx$

La solución particular es $y_p=\frac{1}{(D-1)^2}t^3e^t=e^t\frac{1}{D^2}t^3$

$$y_p=e^t\frac{1}{D}\frac{t^4}{4}=e^t\frac{t^5}{20}=x\frac{Ln^5x}{20}$$

La solución general de la ecuación es:

$$y=y_c+y_p=c_1x+c_2xLnx+x\frac{Ln^5x}{20}$$

b) Ejercicios Propuestos

I. Encuentre una solución particular de:

1) $(D+2)^2y=12xe^{-2x}$ Rpta: $y_p=2x^3e^{-2x}$

2) $(D-2)^3y=6xe^{2x}$ Rpta: $y_p=\frac{x^4}{4}e^{2x}$

3) $(D+3)^3y=15x^2e^{-3x}$ Rpta: $y_p=\frac{x^5}{4}e^{-3x}$

4) $D^2(D-2)^2y=16e^{2x}$ Rpta: $y_p=2x^2e^{2x}$

5) $(D^2-D-2)y=18xe^{-x}$ Rpta: $y_p=(3x^2+2x)e^{-x}$

6) $(D-2)^2y=20-3xe^{2x}$ Rpta: $y_p=5-\frac{x^3}{2}e^{2x}$

7) $(D+1)^2y=e^{-x}+3x$ Rpta: $y_p=\frac{x^2e^{-x}}{2}+3x-6$

8) $(D^2-4)y=16xe^{-2x}+8x+4$ Rpta: $y_p=-(2x+1)(xe^{-2x}+1)$

9) $(D^2-4D+4)y=6x^2e^{2x}$ Rpta: $y_p=\frac{x^4}{2}e^{2x}$

10) $(D-3)^2y=e^{3x}$ Rpta: $y_p=\frac{x^2}{2}e^{3x}$

11) $D(D-2)y=e^{2x}$ Rpta: $y_p=\frac{x}{2}e^{2x}$

12) $D^2(D+1)y=e^{-x}$ Rpta: $y_p=xe^{-x}$

13) $(D^2+4D+5)y=4e^{-2x}\cos x$ Rpta: $y_p=2xe^{-2x}\operatorname{sen}x$

14) $(D^2-4D+13)y = 24e^{2x}\operatorname{sen}3x$ Rpta: $y_p = -4xe^{2x}\cos 3x$

15) $(D^2-3D+2)y = 72xe^{-x}$ Rpta: $y_p = 2(6x+5)e^{-x}$

16) $(D^2+4)y = 12(\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x)$ Rpta: $y_p = 4\operatorname{sen}x - 3x\cos 2x$

17) $(D^2+4)y = 20(e^x-\cos 2x)$ Rpta: $y_p = 4e^x - 5x\operatorname{sen}2x$

18) $(D^2+16)y = 8(x+\operatorname{sen}x)$ Rpta: $y_p = x\left(\frac{1}{2}-\cos 4x\right)$

19) $(D^2+4)y = 8\operatorname{sen}x\cos x$ Rpta: $y_p = -x\cos 2x$

20) $(D^2+4)y = 8\cos^2 x$ Rpta: $y_p = 1 + x\operatorname{sen}2x$

21) $(D^3+D^2+D+1)y = 2e^{2t}$ Rpta: $y_p = \frac{2}{15}e^{2t}$

22) $(D-1)^3(D+1)y = -2e^t$ Rpta: $y_p = -t^3\frac{e^t}{3!}$

23) $(D^2+4)y = e^{it}$ Rpta: $y_p = \frac{e^{it}}{3}$

24) $(D^4-1)y = 2\operatorname{senh}t$ Rpta: $y_p = \frac{t}{2}.\cosh t$

25) $D^2(D+2)y = 2+e^{-t/2}$ Rpta: $y_p = \frac{t^2}{4}+\frac{16}{4}e^{-t/2}$

26) $(D^2+1)y = 3t^4$ Rpta: $y_p = 3t^4 - 36t + 72$

27) $(2D+1)y = (t-3)e^{-t}$ Rpta: $y_p = (1-t)e^{-t}$

28) $(D^2-3D+2)y = 2+t$ Rpta: $y_p = (1-2t)/4$

29) $(D^4+2D^2+1)y = \cos t$ Rpta: $y_p = \frac{t^2}{8}\cos t$

II. Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

1) $(D^3-5D^2+8D-4)y = e^{2x}$ Rpta: $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3xe^{2x} + \frac{x^2}{2}e^{2x}$

2) $(D^2-3D+2)y = e^x + e^{2x}$ Rpta: $y = (c_1-x)e^x + (c_2+x)e^{2x}$

3) $D^2(D-2)^3y = 48e^{2x}$ Rpta: $y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x + c_5x^2 + 2x^3)e^{2x}$

4) $(D^2+16)y = 14\cos 3x$ Rpta: $y = c_1\cos 4x + c_2\operatorname{sen}4x + 2\cos 3x$

5) $(D^3+3D^2-4)y = xe^{-2x}$

Rpta: $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3xe^{-2x} - \frac{1}{18}(x^3+x^2)e^{-2x}$

6) $(D^2-4D+13)y = 24e^{2x}\cos 3x$ Rpta: $y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen}3x + 3\cos x)$

7) $(D^2-4D+13)y = 24e^{2x}\cos 3x$ Rpta: $y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen}3x + 4x\operatorname{sen}3x)$

8) $(D^2+4)y = 2\cos x\cos 3x$

Rpta: $y = c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen}2x + \frac{x}{4}\operatorname{sen}2x - \frac{\cos 4x}{12}$

9) $(D^2+25)y = \operatorname{sen}5x$ Rpta: $y = c_1\cos 5x + c_2\operatorname{sen}5x - 0.1x\cos 5x$

10) $D(D^2+1)y = \operatorname{sen}x$ Rpta: $y = c_1 + c_2\cos x + \left(c_3 - \frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}x$

11) $(D^2-9D+18)y = e^{e^{-3x}}$ Rpta: $y = c_1e^{3x} + \left(c_2 + \frac{e^{e^{-3x}}}{9}\right)e^{6x}$

12) $D^2(D^2+1)y = \operatorname{sen}x$ Rpta: $y = c_1 + c_2x + \left(c_3 + \frac{x}{2}\right)\cos x + c_4\operatorname{sen}x$

13) $(D^2+D+2)y = 2(1+x-x^2)$ Rpta: $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + x^2$

14) $(D^2-1)y=\operatorname{sen}^2 x$ Rpta: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{10}$

15) $(D^2-1)y=(1+e^{-x})^{-2}$ Rpta: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-1+e^{-x}Ln(1+e^x)$

16) $(D^2-3D+2)y=\operatorname{sen} e^{-x}$ Rpta: $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-e^{2x}\operatorname{sen} e^{-x}$

17) $(D^2+D+1)y=e^{3x}+6e^x-3e^{-2x}+15$ Rpta: $y_p=\frac{e^{3x}}{13}+2e^x-e^{-2x}+5$

18) $(D^3+2D^2-6D+8)y=xe^{-3x}$

Rpta: $y=c_1e^x+c_2e^{4x}+c_3e^{-2x}-\frac{e^{-3x}}{784}(28x+34)$

19) $(D^3+1)y=\cos x$ Rpta: $y=\phi_c(x)+\frac{1}{2}(\cos x-\operatorname{sen} x)$

20) $(D^2+4)y=\operatorname{sen} 2x$ Rpta: $y=\phi_c(x)-\frac{x\cos 2x}{4}$

21) $(D^3+D^2+D+1)y=e^x+e^{-x}+\operatorname{sen} x$

Rpta: $y=\phi_c(x)+\frac{1}{4}(e^x+2xe^{-x})-\frac{x}{4}(\operatorname{sen} x+\cos x)$

22) $(D^2-1)y=x^2\operatorname{sen} 3x$ Rpta: $y=c_1e^x+c_1e^{-x}-\frac{25x^2-13}{250}\operatorname{sen} 3x-\frac{3x}{25}\cos 3x$

23) $(D^2+3D+2)y=x\operatorname{sen} 2x$

Rpta: $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}-\frac{30x-7}{200}\cos 2x-\frac{5x-12}{100}\operatorname{sen} 2x$

24) $D^4(D^2-1)y=x^2$ Rpta: $y=\phi_c(x)-\frac{1}{360}(x^6+30x^4)$

25) $(D^2-2D-1)y=e^x\cos x$ Rpta: $y=\phi_c(x)-\frac{e^x\cos x}{3}$

26) $(D^2-4D+3)y=2xe^{3x}+3e^x\cos 2x$

Rpta: $y=c_1e^x+c_2e^{3x}+\frac{e^{3x}}{2}(x^2-x)-\frac{3}{8}e^x(\cos 2x+\operatorname{sen} 2x)$

27) $(D^3-2D+4)y=x^4+3x^2-5+2$

Rpta: $y=c_1e^{-2x}+e^x(c_2\cos x+c_3\operatorname{sen} x)+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{3x^2}{2}-\frac{5x}{2}-\frac{7}{8}$

28) $(D^2+2)y=x^3+x^2+e^{-2x}+\cos 3x$

Rpta: $y=\phi_c(x)+\frac{1}{2}(x^3+x^2-3x-1)+\frac{e^{-2x}}{6}-\frac{\cos 3x}{7}$

29) $(D^2+5D+6)y=e^{-2x}\operatorname{sen}^2 x(1+2\operatorname{tg} x)$ Rpta: $y=\phi_c(x)+e^{-2x}\operatorname{tg} x$

30) $(D^2+D)(D-2)^3(y)=e^{2x}+e^{-x}\operatorname{sen} 3x$

Rpta: $y=c_0+c_1e^{-x}+(c_2+c_3x+c_4x^2)e^{2x}+\frac{x^3}{36}e^{-2x}+\frac{e^{-x}}{7860}(6\cos 3x-3\operatorname{sen} 3x)$

31) $(D^2+6D+9)(y)=2xe^{3x}+9x^2-3$

Rpta: $y=(c_0+c_1x)e^{3x}+\frac{x^3}{3}e^{3x}+x^2+\frac{4x}{3}+\frac{1}{3}$

32) $(D^2+6D+9)(y)=2e^{-2x}\operatorname{sen} x$ Rpta: $y=(c_0+c_1x)e^{-3x}-e^{-2x}\cos x$

33) $(D^3+6D^2+9D)(y)=x^3+e^x$

Rpta: $y=c_0+(c_1+c_2x)e^{3x}+\frac{e^x}{4}+\frac{x^4}{36}+\frac{2x^3}{27}+\frac{3x^2}{27}+\frac{24}{2165}$

34) $[(D-1)(3-D)(4+D)(6+D)-40](y)=e^{-x}x\cos(-2x)$

35) $y^{(12)}+12y^{(10)}+48y^{(8)}+65y^{(6)}+12y^{(4)}+48y^{(2)}+64y=\cos 3x-\operatorname{sen} x$

36) $(64D^8+48D^6+12D^4+D^2)(y)=\operatorname{sen}(x/2)+\cos(x/2)+e^{-\frac{x}{4}}$

37) $D^2(D^4-4D^3+6D^2-4D+1)(y)=(x^2+1)(1-e^x)$

38) $(D^3-D^2-D+1)(y)=7-6x-3x^2+x^3+x^4e^{5x}$

39) $(D^8-2D^4+1)(y)=(2x-1)\cosh^2 x$

40) $(D^2+64)^{30}(y)=\cosh x+\cos 8+\operatorname{sen}8x$

41) $(D-1)^3(D-2)^4(D-3)^3(y)=e^x(2-3x+4x^2)+e^{2x}(3-2x+x^2-x^3)+x^3e^{3x}$

42) $(D-2)(D^2-2D+5)^2(y)=xe^x\cos 2x$

43) $(D^2-2D+2)^2(y)=e^x(2x\cos x-6\operatorname{sen}x)+xe^{-x}$

44) $y^{(5)}+4y^{(4)}+14y^{(3)}+62y^{(2)}+149y^{(1)}+149y+130y=e^x+x$

45) $y^{VIII}-2y^{IV}+y=\cos 4x+\operatorname{sen}6x$

46) $y^{VI}+9y^{IV}+24y^{II}+16y=e^{2x}+x^{12}$

47) $y^{VIII}+13y^{VI}+60y^{IV}+112y^{II}+64y=e^{-4x}+\cos x+\operatorname{sen}x+\cosh 5x$

48) $y^{IX}+3y^{VIII}+8y^{VII}+16y^{VI}+23y^{V}+29y^{IV}+18y^{III}+$

$+20y^{II}+12y^{I}+4y=e^{-x}+4\operatorname{senh}x$

49) $y^{(100)}+100y=\cos x+x^{100}$

50) $y^{(12)}+21y^{(10)}+147y^{(8)}+344y^{(6)}+21y^{(4)}+147y^{(2)}+343y=4+\cos 2x$

51) $(D^5+2D^3+10D^2+D+10)y=0$

52) $(D^2+1)y=2\sec^3 x$

53) $(D^9-4D)y=6e^{-x}-3e^x$, $y=7$, $Dy=9$, $D^2y=19$ Cuando x = Ln 2

54) $(D^9+4D)y=8\cos 2x+4$

55) $(D^4-D^3-7D^2+3D)y=e^{3x}x^{2x}$

56) $(D^3-D)y=1+x^5$

57) $(D^4-2D^3+2D^2-2D+1)y=e^x\cos 2x$

58) $(3D^4+8D^3+6D^2)y=(x^3-6x^2+12x-24)e^{-x}$

59) $(D^8+8D^4+17)=e^{2x}+\cos 3x$

60) $D^3(D^2+1)^4y=\operatorname{sen}x+\cos x+1$

61) $(D^5+4D^4+14D^3+62D^2+149D+130)y=60e^{100x}$

III. Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1) $x^2y''+xy'+4y=\operatorname{sen}(Lnx)$

Rpta: $y=c_1\cos(2Lnx)+c_2\operatorname{sen}(2Lnx)+\frac{1}{3}\operatorname{sen}(Lnx)$

2) $x^2y''+7xy'+5y=x$ Rpta: $y=\frac{c_1}{|x|}+\frac{c_2}{|x|^5}+\frac{x}{12}$

3) $3x^2y''+12xy'+9y=0$ Rpta: $y=\frac{c_1}{|x|^{3/2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}Ln|x|\right)+\frac{c_2}{|x|^{3/2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}Ln|x|\right)$

4) $x^2y''-3xy'+4y=Lnx$ Rpta: $y=c_1x^2+c_2x^2Lnx+\frac{Lnx}{4}+\frac{1}{4}$

5) $x^2y''-2xy'+2y=3x^2+2Lnx$

6) $y'''+\frac{3y''}{x+a}+\frac{y'}{(x+a)^2}-\frac{y}{(x+a)^3}=(x+a)^{-1}\cos(3Ln(x+a))$

7) $x^2y''+xy'+4y=\operatorname{sen}(Lnx)$

8) $x^2y''+4xy'+2y=\cos x+\frac{1}{x}$

9) $x^3y'''+2x^2y''-xy'+y=x^2Lnx$

10) $x^2y''+xy'+4y=\cos(2\,Lnx)$

11) $(x+1)^3y'''+(x+1)^2y''+3(x+1)y'-8y=\dfrac{x}{(x+1)^{1/2}}$

12) $x^2y''+4xy'+2y=2\,Ln^2x+12x$

13) $(2x+1)^4y''+3(2x+1)^3y'+(2x+1)^2y=6\,Ln(2x+1)$

14) $x^3y'''-4x^2y''+8xy'-8y=4\,Lnx+\cos(Lnx^4)+\operatorname{sen}(2\,Lnx)$

15) $x^2y'''+xy''+4y'=1+\cos(2\,Lnx)$

16) $x^2y''+xy'+9y=\operatorname{sen}(Lnx^3)+\cos(Lnx^3)$

17) $x^3D^3y-3x^2D^2y+6xDy-6y=60x^6+12x^{18}$

18) $x^4y^{IV}-6x^3y^{III}+15x^2y^{II}+9xy'-9y=\cos(Lnx)+x^4+\operatorname{sen}(Lnx^3)$

19) $(D^4+8D^2+32)=xe^x+1$

20) $(D^4-1)(y)=\cos x+\cos x\operatorname{sen}x+x^3e^x$

21) $y^{VI}+9y^{IV}+24y''+16y=e^{2x}+x^7$

22) $(3x-1)^3y^{IV}+(3-9x)^2y'''+(3x-1)y''=36x^2-24x+4$

23) $(D^2+81)^8(y)=\cos(9x+b^3)+\operatorname{sen}(9x+2-b^3)$, donde b es cualquier constante real.

24) $(D^6+1)^2(y)=e^x+x^{24})$

25) $(D^4+8D^2+16)^3(y)=\cos 5x+\operatorname{sen}2x+e^{-3x}$

Rpta: $y_g=(c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+c_5x^4+c_6x^5)\operatorname{sen}2x$

$$y_p=\frac{\cos 5x}{21^6}+x^6\,\frac{\operatorname{sen}(2x-3\pi)}{4^6\,6!}+\frac{e^{-3x}}{(13)^6}$$

$$y=y_g+y_p$$

CAPITULO VII

7. ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES VARIABLES

Las ecuaciones diferenciales de orden n, de coeficientes variables son de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x) \quad \text{....... (1)}$$

donde $a_0(x),a_1(x),\dots a_n(x),f(x)$ son funciones de variable real x,y continuas en un intervalo.

Suponiendo que $a_n(x)\neq 0$, entonces la ecuación (1) se puede expresar en la forma:

$$\frac{d^ny}{dx^n}+b_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+b_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+b_n(x)y=g(x) \quad \text{....... (2)}$$

La solución de la ecuación (2) es la suma de la solución general y_g de la ecuación diferencial homogénea correspondiente, más una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente.

Si $y_1,y_2,\dots y_n$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (2) entonces la solución particular de la ecuación (2) es:

$$y_p=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2+\dots+c_n(x)y_n \quad \text{....... }(\alpha)$$

donde $c_1(x),\dots,c_n(x)$ son funciones incógnitas de x por determinarse.
Para determinar las funciones incógnitas se forma el siguiente sistema:

Sea $c_1(x)y_1+c_2(x)y_2+\dots+c_n(x)y_n=0$, entonces:

$$(\beta)\begin{cases} y_1c'_1(x)+y_2c'_2(x)+\dots+y_nc'_n(x)=0\\ y'_1\,c'_1(x)+y'_2\,c'_2(x)+\dots+y'_n\,c'_n(x)=0\\ \vdots\\ \vdots\\ y_1^{(n-1)}c'_1(x)+y_2^{(n-1)}c_2(x)+\dots+y_n^{(n-1)}c'_n(x)=g(x)\end{cases}$$

al resolver el sistema (β) se obtiene: $\frac{dc_i(x)}{dx} = f_i(x), \quad i = 1,2,\dots,n$ donde

$c_i(x) = \int f_1(x)dx$, este resultado se sustituye en (α)

obteniéndose la solución particular y_p .

Veremos para una ecuación de 2do. orden.

$y'' + p(x)y' + Q(x)y = R(x)$. donde y_1, y_2

es un sistema de soluciones.

Luego la solución particular es: $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$

donde $c_1(x), c_2(x)$ son funciones por determinarse para esto formaremos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} y_1 c'_1(x) + y_2 c'_2(x) = 0 \\ y'_1 c'_1(x) + y'_2 c'_2(x) = R(x) \end{cases} \quad \text{de donde}$$

$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$. Entonces

$$c'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y'_2 \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = \frac{R(x)y_2}{W[y_1, y_2]}$$

$$c_1(x) = -\int \frac{R(x)y_2 dx}{W[y_1, y_2]}$$

$$c'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & R(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = \frac{R(x)y_1}{W[y_1, y_2]}$$

$$c_2(x) = -\int \frac{R(x)y_1 dx}{W[y_1, y_2]}$$

Ejemplo:

1. Resolver la ecuación diferencial siguiente:

$(\cos x - \operatorname{sen} x)y'' + 2\operatorname{sen} x . y' - (\operatorname{sen} x + \cos x)y = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)^2$

$y_1 = e^x, \quad y_2 = \operatorname{sen} x$

Solución

La ecuación diferencial dad se puede escribir en la forma:

$$y'' + \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} y' - \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x - \operatorname{sen} x} y = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

La solución particular es $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$

donde $c_1(x), \ c_2(x)$ son funciones incógnitas de x por determinarse:

Luego: $\begin{cases} y_1 c'_1(x) + y_2 c'_2(x) = 0 \\ y'_1 c'_1(x) + y'_2 c'_2(x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) \end{cases}$

$$\begin{cases} e^x . c'_1(x) + \operatorname{sen} x . c'_2(x) = 0 \\ e^x . c'_1(x) + \cos x . c'_2(x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) \end{cases}$$

$$c'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & \operatorname{sen} x \\ e^x & \cos x \end{vmatrix}} = -\operatorname{sen} x \to c_1(x) = \cos x$$

$$c'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & \operatorname{sen} x \\ e^x & \cos x \end{vmatrix}} = e^x \to c_2(x) = e^x$$

Luego la solución particular es $y_p = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$ y la solución general es:

$y = c_1 e^x + c_2 \operatorname{sen} x + e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$

2. **Resolver la ecuación diferencial**

$$xy'' - y' - 4x^3 y = 16x^3 e^{x^2}, \quad y_1 = e^{x^2}, \quad y_2 = e^{-x^2}$$

Solución

$$y'' - \frac{1}{x}y' - 4x^2 y = 16x^2 e^{x^2}$$

La solución particular es: $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$

donde $c_1(x), c_2(x)$ son funciones por determinarse

$$\text{Luego: } \begin{cases} e^{x^2} c'_1(x) + e^{-x^2} c'_2(x) = 0 \\ 2xe^{x^2} c'_1(x) - 2xe^{-x^2} c'_2(x) = 16x^3 e^{x^2} \end{cases}$$

de donde se tiene:

$$c'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x^2} \\ 16x^3 e^{x^2} & -2xe^{-x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} \\ 2xe^{x^2} & 2xe^{-x^2} \end{vmatrix}} = 4x \to c_1(x) = 2x^2$$

$$c'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{x^2} & 0 \\ 2xe^{x^2} & 16x^3 e^{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} \\ 2xe^{x^2} & -2xe^{-x^2} \end{vmatrix}} = -4xe^{2x^2} \to c_2(x) = -e^{2x^2}$$

Luego $y_p = 2x^2 e^{x^2} - e^{x^2}$ y la solución general es:

$$y = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2} - e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}$$

Teorema.- Mostrar que la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ se transforma en $\frac{d^2u}{dx^2} + f(x)u = 0$, haciendo el cambio de variable y = u(x).v(x), y escogiendo V(x) en forma apropiada.

Demostración

Sea $y = uv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = V\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + u\frac{d^2v}{dx^2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada.

$$v\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + u\frac{d^2v}{dx^2} + P(x)\left(v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}\right) + Q(x)uv = 0$$

$$v\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{d^2v}{dx^2} + P(x)\frac{dv}{dx} + Q(x)v\right)u + \left(P(x)v + 2\frac{dv}{dx}\right)\frac{du}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P(x)}{v}\frac{dv}{dx} + Q(x)\right)u + \left(P(x) + \frac{2}{v}\frac{dv}{dx}\right)\frac{du}{dx} = 0 \quad \text{..........(1)}$$

ahora daremos la forma deseada, escogiendo v(x) de modo que $P(x) + \frac{2}{v}\frac{dv}{dx} = 0$, de donde $\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2}P(x)$ entonces $\ln v = -\frac{1}{2}\int P(x)dx$

de donde $v = e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx}$

Luego la cuación (1) se reduce a:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P(x)}{v}\frac{dv}{dx} + Q(x)\right)u = 0 \quad \text{..................................(2)}$$

haciendo $f(x) = \frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P(x)}{v}\frac{dv}{dx} + Q(x)$, la ecuación (2)

queda en la forma:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x)u = 0$$

Ejemplo.- Resolver la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

Solución

a la ecuación diferencial dada escribiremos así:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0 \text{..............................(1)}$$

donde $P(x) = \frac{2}{x}$ y $Q(x) = 1$.

haciendo el cambio $y = uv$ ....(2)

$$\text{donde } v = e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx} = e^{-\int\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{v''}{v} + P\frac{v'}{v} + Q(x) = \frac{\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x}} + \frac{2}{x}\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}\right) + 1$$

$$= \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2} + 1 = 1$$

como la ecuación (1) se transforma en la forma $\frac{d^2u}{dx^2} + f(x)u = 0$ entonces

$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0$ de donde $P(r) = r^2 + 1 = 0$.

cuyas raices son $r_1 = i$, $r_2 = -i$

La solución es $u = c_1\cos x + c_2 x$

$$\text{como } y = uv = \frac{u}{x} \Rightarrow u = xy$$

$\therefore$ La solución es $xy = c_1\cos x + c_2\ \text{sen}\ x$

Observación: Si y_1 es una solución de la ecuación diferencial

$y'' + p(x)y' + Q(x)y = R(x)$ se puede determinar la segunda solución y_2 de la ecuación diferencial mediante la expresión: $y_2 = v(x)y_1$ donde $v(x)$ es una función por determinar.

Teorema.- Si Y_1 es la solución particular de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

Demostrar que $Y_2 = cY_1\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx$ es también solución de la ecuación diferencial.

Demostración

Como Y_1 es una solución de la ecuación diferencial entonces
$Y_1'' + P(x)Y_1' + Q(x)Y_1 = 0$ (lo verifica)

de acuerdo a la observación se tiene $Y = Y_1 z$ es la solución general donde z es la función incognita derivando se tiene $Y' = Y_1 z' + Y_1' z$

$$Y'' = Y_1 z'' + 2Y_1' z' + Y_1'' z$$

ahora reemplazando en la ecuación diferencial

$$Y_1 z'' + 2Y_1' z' + Y_1'' z + P(x)(Y_1 z' + Y_1' z) + Q(x)Y_1 z = 0$$

$$Y_1 z'' + (2Y_1' + P(x)Y_1)z' + \underbrace{(Y_1'' + P(x)Y_1' + Q(x)Y_1)}_{0}z = 0$$

$$Y_1 z'' + (2Y_1' + P(x)Y_1)z' = 0 \Rightarrow z'' + \left(2\frac{y_1'}{Y_1} + P(x)\right)z' = 0 \text{............(1)}$$

haciendo $z' = u \Rightarrow z'' = u'$ reemplazando en (1) se tiene:

$$u' + \left(\frac{2Y_1'}{Y_1} + P(x)\right)u = 0 \Rightarrow \frac{u'}{u} = \left(\frac{2Y_1'}{Y_1} + P(x)\right) \text{ integrando } \ln u = 2 Ln Y_1 \int P(x)dx + c_1$$

$\ln u Y_1^2 = \int P(x)dx + c_1$ levantando el logaritmo

$$uY_1^2 = e^{-\int P(x)dx + c_1} = c.e^{-\int P(x)dx}$$

$$u = c\frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2} \quad \text{pero } u = z'$$

$$z' = c\frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2} \quad \text{integrando}$$

$$z = c\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx + c_1 \qquad \text{como} \quad Y = Y_1 z$$

$$Y = Y_1\left[c\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx + c_1\right]$$

$$Y = c.Y_1\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx + c_1 Y_1$$

Se observa que la segunda solución de la ecuación diferencial es dada por:

$$Y_2 = c.Y_1\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx$$

Ejemplo.- Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \text{ donde } Y_1 = x \text{ es la solución particular.}$$

Solución

de acuerdo al teorema anterior la segunda solución es:

$$Y_2 = c.Y_1\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx \text{ ....(1)}$$

Luego a la ecuación diferencial expresaremos a la forma.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{1-x^2}y = 0 \text{ de donde } P(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$$

ahora reemplazamos en (1).

$$Y_2 = c\ Y_1\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2}dx = cx\int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2}dx$$

$$= c\ x\int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2}dx = cx\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)}$$

$$Y_2 = cx\left(\int\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right)\right]dx\right)$$

$$Y_2 = cx\left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x)\right]$$

$$Y_2 = c\left[-1 + \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]$$

Luego la solución general es $Y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$$\therefore\ Y = c_1 x + c_2\left(-1 + \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)$$

Ejemplos:

1. **Hallar la segunda solución de la ecuación diferencial:**

$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ donde $\phi_1(x) = e^{x^2}$

Solución

Sea $\phi_2(x) = ve^{x^2}$ donde $v' = u$

$$\phi'_2(x) = v'e^{x^2} + 2xve^{x^2}$$

$$\phi''_2(x) = e^{x^2}v'' + 4xe^{x^2}v' + (4x^2+2)e^{x^2}v$$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$$e^{x^2}v'' + 4xe^{x^2}v' + (4x^2+2)e^{x^2}v - 4xe^{x^2}v' - 8x^2e^{x^2}v - 2e^{x^2}v = 0$$

$$e^{x^2}v'' + (4x-4x)e^{x^2}v' + (8x^2-8x^2+2-2)e^{x^2}v = 0$$

de donde $e^{x^2}v'' = 0 \to v'' = 0 \to u' = 0$

$$u = 1 \text{ pero } v' = u \to v' = 1 \to v = x$$

Luego la segunda solución es: $\phi_2(x) = xe^{x^2}$

y la solución general es: $y = c_1e^{x^2} + c_2xe^{x^2}$

2. Resolver la ecuación diferencial: $y'' - y' + ye^{2x} = xe^{2x} - 1$, $y_1 = \operatorname{sen} e^x$

Solución

Sea $y_2 = y_1v$, la segunda solución de la ecuación diferencial homogénea.

$y_2 = \operatorname{sen} e^x . v$

$y'_2 = v'\operatorname{sen} e^x + \cos e^x . e^x v$

$y''_2 = \operatorname{sen} e^x . v'' + 2e^x \cos e^x . v' + e^x(\cos e^x - e^x \operatorname{sen} e^x)v = 0$

Luego:

$\operatorname{sen} e^x . v'' + 2e^x \cos e^x . v' + e^x[\cos e^x - e^x \operatorname{sen} e^x]v$

$$-v'\operatorname{sen} - e^x \cos e^x . v + e^{2x}\operatorname{sen} e^x . v = 0$$

simplificando se tiene:

$\operatorname{sen} e^x . v'' + (2e^x \cos e^x - \operatorname{sen} e^x)v' = 0, v' = u$

$\operatorname{sen} e^x . u'' + (2e^x \cos e^x - \operatorname{sen} e^x)u' = 0$

$$\frac{u'}{u} + 2e^x \operatorname{ctg} e^x - 1 = 0$$

$Lnu + Ln\operatorname{sen}^2 e^x = x$

$Lnu.\operatorname{sen}^2 e^x = x \to u\operatorname{sen}^2 e^x = e^x$

$$u = e^x \csc^2 e^x \to v' = e^x \csc^2 e^x$$

$v = -\operatorname{ctg} e^x$ como $y_2 = \operatorname{sen} e^x . v$

$$y_2 = -\operatorname{sen} e^x . \frac{\cos e^x}{\operatorname{sen} e^x}$$

$$y_2 = -\cos e^x$$

Luego la solución complementaria es:

$$y_g = c_1 \operatorname{sen} e^x + c_2 \cos e^x$$

Ahora hallaremos y_p por método variación de parámetro:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} e^x u'_1 + \cos e^x u'_2 = 0 \\ e^x \cos e^x u'_1 - e^x \operatorname{sen} e^x u'_2 = xe^{2x} - 1 \end{cases}$$

$$u'_1 = xe^x \cos e^x - \frac{\cos e^x}{e^x}$$

$$u'_1 = xe^x \cos e^x - \frac{\cos e^x}{e^x}$$

$$u_1 = x\,\text{sen}\,e^x - \int e^x \frac{\text{sen}\,e^x}{e^x}dx - \int \frac{\cos e^x}{e^x}dx$$

$$u_1 = x\,\text{sen}\,e^x - \frac{\cos e^x}{e^x}$$

$$u_2 = x\,\text{sen}\,e^x + \frac{\cos e^x}{e^x}$$

como $y_p = u_1\,\text{sen}\,e^x + u_2 \cos e^x$ se tiene:

$y_p = x$ al simplificar

Luego la solución general es:

$$y = x + c_1\,\text{sen}\,e^x + c_2 \cos e^x$$

Ejercicios Propuestos:

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $xy'' - y' - 4x^3y = 16x^3e^{x^2}$, $y = e^{x^2}$, $y = e^{-x^2}$

Rpta: $y = c_1e^{x^2} + c_2e^{-x^2} + (2x^2-1)e^{x^2}$

2) $x(1-xLnx)y'' + (1+x^2Lnx)y' - (x+1)y = (1-xLnx)^2e^x$, $y_1 = e^x$, $y_2 = Lnx$

Rpta: $y = c_1e^x + c_2Lnx + e^x(x + xLnx + Lnx)$

3) $x^2(Lnx-1)y'' + xy' + y = 0$, $y_1 = x$ Rpta: $y = c_1Lnx + c_2x$

4) $y'' \pm (\text{tg}\,x - 2c\,\text{tg}\,x)y' + 2c\,\text{tg}^2\,x.y = 0$, $y_1 = \text{sen}\,x$

Rpta: $y = c_1\,\text{sen}\,x + c_2\,\text{sen}^2\,x$

5) $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$, $y_1 = \frac{1}{x}$ Rpta: $y = c_1x^2 + \frac{c_2}{x} + x^4$

6) $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = x^2(2x-3)$, $y_1 = x^2$

Rpta: $y = x^3 + c_1x^2 + c_2(2x-1)$

7) $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2.e^x$, $y_1 = e^x$ Rpta: $y = c_1x + c_2e^x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^x$

8) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$

9) $y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$ Rpta: $y_2 = x$

10) $xy'' - (x+1)y' + y = 0$, $y_1 = e^x$ 11) $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0$, $y_1 = x^3$

12) $\cos^2 x.y'' - \text{sen}\,x\cos x.y' - y = \text{sen}\,x$

$y_1 = \sec x$, $y_2 = \text{tg}\,x$

13) $(x^2D^2 - 2xD + 2)\,y = x^3\ln x$, sabiendo que $y_g = c_1\,x + c_2\,x$ es la solución de la ecuación homogénea

14) $xy'' + 2y' + xy = 0$ Rpta: $y = \frac{c_1\cos x}{2} + \frac{c_2\,\text{sen}\,x}{2} - \frac{\cos x}{2}$

15) sen x.y″ + 2 cos x.y′ sen x.y = 2 cos 2x, tal que $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Rpta: $y = \frac{1-\cos 2x}{2\,\text{sen}\,x}$

16) $y'' - 4y' - 12y = 0$, $Y_1 = e^{6x}$ Rpta: $c_1e^{6x} + c_2e^{2x}$

17) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, $Y_1 = x$ Rpta: $y = c_1x + \frac{c_2}{x^2}$

18) $(x^4 - x^3)y'' + (2x^3 - 2x^2 - x)y'y = \frac{(x-1)^2}{x}$, $Y_1 = \frac{1}{x}$

19) $xy'' - y' - 4x^3y = 0$, $y_1 = e^{x^2}$

20) $(2x + 1)y'' + (4x - 2)y'\ 8y = 0,\ \ Y_1 = e^{mx}$

21) $y'' + y'\,\mathrm{tg}\,x + y\cos^2 x = 0,\ \ Y_1 = \cos(\mathrm{sen}\,x)$

22) $x^4 y'' + 2x^3 y' + y = x^{-2},\ \ Y_1 = \mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

23) $(1 + 2x)y'' + 4xy' - 4y = 0,\ \ Y_1 = e^{-2x}$

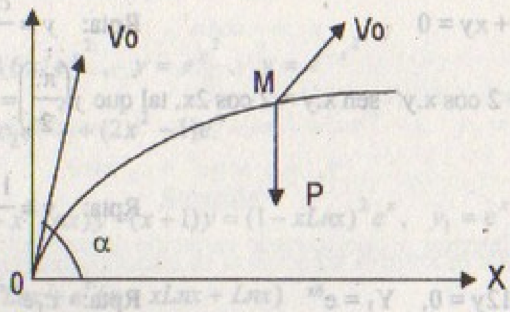
24) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

25) $(x + 1)^2 y'' - 2(x + 1)y' + (x^2 + 2x + 3)y = 0$

7.1. Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden.-

1^er Problema.- Trayectoria de un proyectil.-

Consideremos un proyectil de peso p lanzando con un ángulo α sobre el plano vertical. Estudiaremos la forma de una trayectoria, despreciando la resistencia del aire.



Acausa de la dirección de la velocidad inicial v_0, el proyectil tiende a elevarse pero como consecuencia de la fuerza vertical de la gravedad p = mg., la trayectoria se curva hacia el suelo, ubiquémonos en el punto M de la trayectoria, al cabo del tiempo t después del lanzamiento, y sean x e y las coordenadas de ese punto. Como se observa en la figura.

Como la única fuerza aplicada al proyectil es la gravedad, proyectamos éste sobre los dos ejes aplicando la fórmula fundamental F = ma:

Sobre el eje horizontal $\quad m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$

Sobre el eje vertical $\quad m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -p = -mg.$

Con el signo -, puesto que la fuerza p actúa en sentido contrario al positivo de y, resulta,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ de donde } \frac{dx}{dt} = c = v_0\cos\alpha \Rightarrow x = v_0\cos\alpha\,.t + c$$

entonces, para t = 0, x = 0 de donde c = 0

Obteniendo:

$$x = v_0\, t\cos\alpha \quad \text{..........................(1)}$$

También: $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -g \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = -gt + c$

para t = 0, y como $\dfrac{dy}{dt}$ que es la proyección vertical de la velocidad v_0 es igual a v_0 es igual a v_0 sen α de donde:

$$v_0\,\mathrm{sen}\alpha = 0 + c \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -gt + v_0\,\mathrm{sen}\alpha$$

que al integrar se tiene $-g\dfrac{t^2}{2} + v_0\,\mathrm{sen}\alpha + K$

para t = 0, y = 0 se tiene k = 0 de donde

$$y = -g\frac{t^2}{2} + v_0\,\mathrm{sen}\alpha \quad \text{.......................(2)}$$

de la ecuación (1) y (2) se elimina el parámetro t

$$y = -\frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + x\,\mathrm{tg}\,\alpha = -ax^2 + bx$$

que representa una parábola de eje paralelo al eje y, pasando por un máximo.

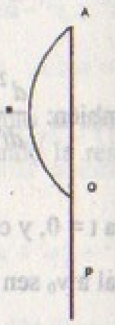
2° Problema.- Problema del resorte vertical.-

Un peso p es atraído por un punto fijo A proporcionalmente a la distancia. Cuando este peso se coloca en "O" a una distancia OA = a y debajo del punto A, la atracción de A sobre el peso p es igual y opuesto al peso p.

Hallar la ecuación del movimiento del peso p.

Suponiendo que se le abandone sin velocidad inicial en el punto A. ¿Cuál es la duración de la oscilación del peso p y cual es su velocidad cuando llegue a O? no se considera resistencia del aire.

Llamamos x a la distancia del peso p al origen A, en un instante cualquiera y contemos positivamente hacia abajo se tiene p = mg.



Además la fuerza atractiva hacia A es de la forma - kx, dirigida en sentido inverso al peso, y la ecuación fundamental es:

$\sum$ de las fuerzas = mr, nos da:

$$m\,g - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

por otra parte, de acuerdo con el enunciado, se tiene en O $mg = ka \Rightarrow k = \frac{mg}{a}$ de

donde: $m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{mg}{a}x = mg$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{a}x = g$$

ecuación fundamental de segundo orden incompleto, cuya solución es:

$$x = M\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t + N\,\text{sen}\sqrt{\frac{g}{a}}t + a$$

para t = 0, x = 0, así como $\frac{dx}{dt}$ se tiene M = -a y N = 0 , de donde

$$\begin{cases} x = a - a\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}t \\ \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{ga}\,\text{sen}\sqrt{\dfrac{g}{a}}t \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

por lo tanto el movimiento x = f(t) es sinusoidal y el peso p oscila de 0 a 2a. el período es $T = \frac{2\pi}{r} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/a}} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$

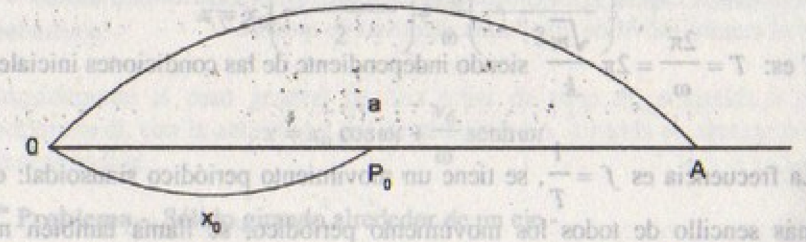
En 0, x = a y de acuerdo a la ecuación (1) se tiene: $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$

de donde la velocidad es $v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{ag}$

3° Problema.- Movimiento de un punto atraído o repelido por un centro fijo o, proporcionalmente a la distancia.-

En este problema consideremos dos casos:

a) El primer caso de atracción



Sea P_0 la posición normal de la abscisa x_0, v_0 la velocidad inicial dirigida hacia el entero O, y llamaremos m a la masa del cuerpo.

La fuerza que actúa sobre el cuerpo es:

$$F = -k^2x \qquad (k^2 \text{ es una constante positiva})$$

Como el signo -, puesto que f se dirige en sentido inverso de x.

La fórmula fundamental del movimiento F = ma dá $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$

que haciendo $\omega^2 = \frac{k^2}{m}$ se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

ecuación diferencial de segundo orden y su solución es:

x = A cos ωt + B sen ωt que es sinusoidal.

Ahora calculando A y B se tiene: para t = 0, x = x_0 se tiene A = x_0

Además $v = \frac{dx}{dt}$ = - A ω sen ωt + B ω sen ωt

y para t = 0, v = v_0 se tiene $v_0 = B\omega \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega}$

de donde se tiene: $x = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}\omega t = M\operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$

el coeficiente de t es la pulsación ω, de donde el perio

T es: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{\sqrt{m}}{k}$ siendo independiente de las condiciones iniciales.

La frecuencia es $f = \frac{1}{T}$, se tiene un movimiento periódico sinusoidal: es decir, el más sencillo de todos los movimiento periódico, se llama también movimiento pendular o movimiento armónico.

La cantidad x se denomina elongación o amplitud instantánea de la vibración, M es la amplitud de y, φ la fase.

Si en un fenómeno vibratorio, la amplitud instantánea viene dado por: x = A senω t la velocidad es: $v = \frac{dx}{dt}$ = A ω cos ω t y la aceleración.

$r = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \operatorname{sen}\omega t = -\omega^2 x$ la fuerza que produce el movimiento (o la fuerza resultante), es, llamado m a la masa del cuerpo en movimiento y "a" a la aceleración:

$$F = ma = -m\omega^2 x = k\omega^2$$

resultando proporcionalmente al cuadrado de la frecuencia.

b) Segundo caso de repulsión

Siendo la fuerza

$$F = +k^2 x$$

La ecuación del movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = \frac{d^2x}{dt} - \omega^2 x = 0, \qquad \left(\omega^2 = \frac{k^2}{m}\right)$$

y la solución de $\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x = 0$, es:

$$x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Con las condiciones del primer caso se calcula A y B obteniendo finalmente:

$$x = x_0\left(\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right) + \frac{v_0}{\omega}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right)$$

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\operatorname{senh}\omega t$$

4° Problema.- Sólido girando alrededor de un eje.-

Sea I el momento de inercia con relación al eje y $\frac{d^2\theta}{dt^2\theta}$ la aceleración angular entonces la fórmula fundamental de los cuerpos que giran alrededor de un eje es:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum \text{ de los momentos de las fuerzas}$$

Sea θ el ángulo de desviación de la posición de equilibrio y c θ el momento resultante de las fuerzas aplicadas.

Momento que supondremos proporcional al ángulo θ.

Como este momento actúa en sentido inverso al del ángulo θ, es negativo, de donde la ecuación.

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -c\theta \Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\theta = 0$$

al resolver la ecuación se tiene:

$$\theta = \theta_0 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{c}{I}}t - \varphi\right)$$

el movimiento resulta perpendicular ó sinusoidal, y como el coeficiente de t representa la pulsación ω se deduce el período.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}}$$

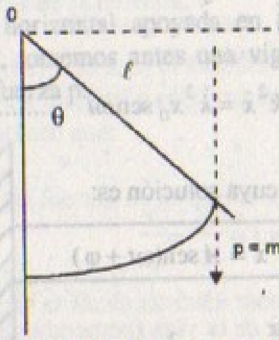
que es independiente de la amplitud.

Esto es lo que se produce cuando el par c θ es debido a la torsión de un hilo elástico y un resorte espiral o un muelle, como ocurre en el balanceo en espiral o un reloj, o en el cuadro móvil de un aparato eléctrico de medida.

7.1.1. Aplicación al péndulo Simple.

Tomemos el ángulo θ, el momento de la fuerza p = mg, que tiende a volver al estado de equilibrio, es momento = p . ℓ sen θ = mgℓ sen θ, y si se supone que el ángulo θ es lo bastante pequeño para que se puedan confundir el seno y el ángulo (θ < 1 0° a 2 0°), podrá escribirse.

momento = mgℓ θ = c θ



Por otra parte, el momento de inercia con respecto al eje es I = mℓ^2, el periodo T es, por consiguiente

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}} = 2\sqrt{\frac{m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

5° Problema.- Oscilaciones forzadas de un sistema oscilante cualquiera, resonancia.-

Considerando el caso general de una masa de peso m, sometida a una fuerza proporcional, con la amplitud x del desplazamiento, dirigida en sentido inverso y sin amortiguación.

La ecuación del movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x, \qquad (k^2 > 0)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$$

en consecuencia, el sistema es oscilante y la amplitud instantánea es:

$x = x_0 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t$ es decir, una sinusoide sin amortiguar.

Sea $\omega^2 = \frac{k^2}{m}$ y supongamos ahora que este sistema, capaz de oscilar, está sometido a una causa exterior, sinusoidal y de pulsación ω, será pues, una fuerza impuesta que va a actuar sobre el sistema, y si x_o es la amplitud máxima, la ecuación del movimiento se convierte en:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = k^2x_0 \operatorname{sen}\omega t \quad ....(1)$$

ecuación de segundo orden, cuya solución es:

$$x = A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

reemplazando en la ecuación (1) se tiene:

$$-Am\omega^2\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + k^2A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = k^2x_0\operatorname{sen}\omega t$$

$A(k^2 - m\omega^2)\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = k^2x_0\operatorname{sen}\omega t$, por lo tanto:

$$\begin{cases} Si\ k^2 < m\omega^2 u\omega < \omega_0, A = \dfrac{k^2x_0}{k^2 - m\omega^2},\ \varphi = 0 \\ Si\ k^2 > m\omega^2 u\omega > \omega_0, A = \dfrac{k^2x_0}{m\omega^2 - k^2},\ \varphi = \pi \end{cases}$$

resulta que:

para $\omega < \omega_0$ el movimiento está en fase
para $\omega > \omega_0$ el movimiento está en operación

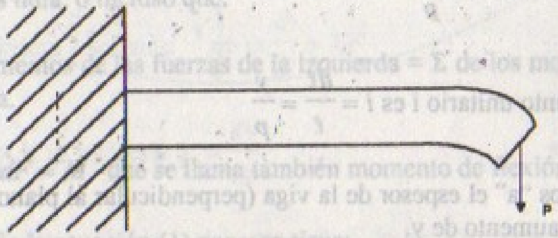
Si $\omega = \omega_0$, A = ∞, hay resonancia: la amplitud del movimiento crece considerablemente, y hay de enormes fuerzas.

Así la resonancia (mecánica aquí) permite, con fuerzas pequeñas, obtener intensos e incluso violentos efectos.

En radio y con circuitos oscilantes se obtiene efectos análogos, lo que permite corregir intensas y de tensiones muy altas o sobretensiones utilísimas para amplificadores ó emisiones.

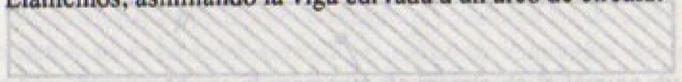
6° Problema.- **Establecimiento de la fórmula fundamental de resistencia de materiales (flexión de vigas).**

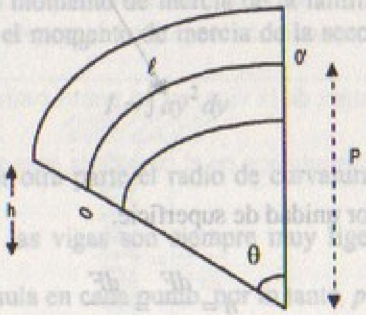
Suponemos una viga horizontal apoyada en dos puntos, pero, por razones de simplicidad y claridad, tomemos antes una viga horizontal sujeta a un extremo y sometido a otro a una fuerza p.



Sea 0 ó la fibra neutra, donde el esfuerzo es nulo, es decir, donde la longitud no cambia, encima la materia se estira y debajo se comprime.

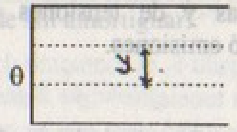
Llamemos, asimilando la viga curvada a un arco de círculo.





S la sección dela viga.
p el radio de curvatura de la fibra neutra.
l la longitud inicial de la viga.
y la distancia de una fibra cualquiera encima de la línea neutra.

Se tiene para la fibra media.



$$\ell = p\theta$$

y para la fibra a la distancia y, de la longitud ha aumentado en $d\ell$

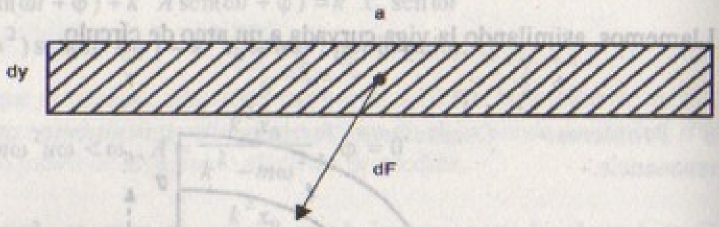
$$\ell + d\ell = (p+y)\theta$$

de donde $d\ell = y\theta = y\dfrac{1}{p}$

el alargamiento unitario i es $i = \dfrac{d\ell}{\ell} = \dfrac{y}{p}$

denominemos "a" el espesor de la viga (perpendicular al plano de la figura) y sea dy un pequeño aumento de y.

Sobre la superficie a.dy se ejerce una fuerza d F.



Sea n el esfuerzo por unidad de superficie.

$$n = \frac{dF}{ds} = \frac{dF}{ady}$$

ahora bien, i es proporcional a n, en tanto que no sobrepasa el límite de elasticidad (la Ley de Hooke), y puede escribirse, n = ki donde k es una constante, que ha sido calificada módulo de elasticidad E.
Sea, por consiguiente

Sea, por consiguiente

$$n = E\,i$$

$$\frac{dF}{ady} = E\left(\frac{y}{p}\right) \text{ de donde } dF = \frac{aE}{p}\,y\,dy \quad ....(1)$$

es la suma de todos los dF sustituida la parte izquierda de la viga supuesta elevada, y equilbrando con la fuerza de la derecha.

En efecto, estando en equilibrio todo el sistema, tomemos los momentos con respecto al punto "O" de todas las fuerzas, y escribamos que la suma algebraica de todos los momentos es nula, o incluso que:

Σ de los momentos de las fuerzas de la izquierda = Σ de los momentos de las fuerzas de la derecha.

Es decir $\int ydF = M$ que se llama también momento de flexión.

Multiplicando la ecuación (1) por y se tiene:

$ydF = \dfrac{aE}{p}y^2dy$, integrando

$$\int_0^h ydF = M = \frac{E}{p}\int ay^2dy$$

ahora bien, ay^2dy es el momento de inercia de la lámina dy con respecto a la línea neutra y si se llama Y el momento de inercia de la sección s con respecto al eje que pasa por O y por G.

$$I = \int ay^2\,dy$$

se tendra $M = \dfrac{EI}{p}$, por otra parte el radio de curvatura es: $p = \dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ pero

como las flexiones de las vigas son siempre muy ligeras, y' que es la pendiente, resulta practicamente nula en cada punto, por lo tanto $p = \dfrac{1}{y''}$, lo que dá

$$M = E\,I\,y''$$

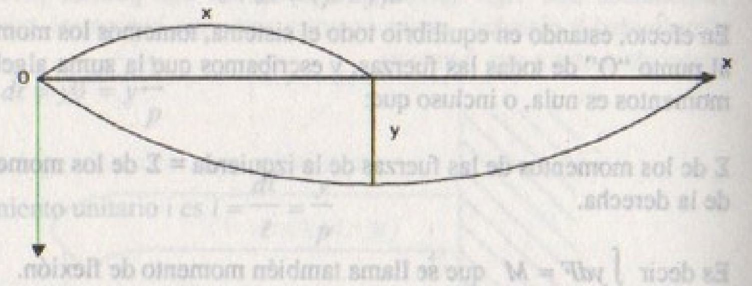
es decir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Fórmula fundamental de la flexión en resistencia de materiales.

7mo Problema.- Cálculo de la flexión de una viga.-

Consideremos una viga horizontal apoyada en dos puntos en sus extremos, esta viga se va a flexionar, para esto tomemos el eje de la viga como eje de las x y llamemos y la desnivelación vertical de la viga en un punto cualquiera, es decir la flexión.



Si se considera:

I = momento de inercia de la sección de la viga con respecto a su centro de gravedad.

E = el módulo de elasticidad del metal.

M = suma de los momentos de todas las fuerzas situadas a la derecha (o a la izquierda) de la sección considera a la distancia x, comprendido los momentos debidos a la reacciones de los puntos de apoyo.

P = radio de curvatura de la viga, en un punto cualquiera de la abscisa x.

Se tiene la misma fórmula que en el caso de la viga sujeta:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E\ I}$$

cuya solución da la flexión y en un punto cualquiera.

8vo Problema.- Vibraciones de una masa pendiente de un muelle.-

Para formular la ecuación diferencial de este problema se necesita dos leyes de la física, la segunda de Newton y la ley de Hooke.

La segunda Ley de Newtón establece que la variación de la cantidad de movimiento de un cuerpo por unidad de tiempo es proporcional a la fuerza resultante que actua sobre el cuerpo y su sentido es la de la fuerza resultante.

Expresando en forma matemática es:

$$\frac{d}{dt}(mv) = KF$$

donde m es la masa del cuerpo, v su velocidad, F la fuerza resultante que actúa sobre él, K una constante de proporcionalidad.

Si m se considera constante $\Rightarrow m\frac{d}{dt} = KF$

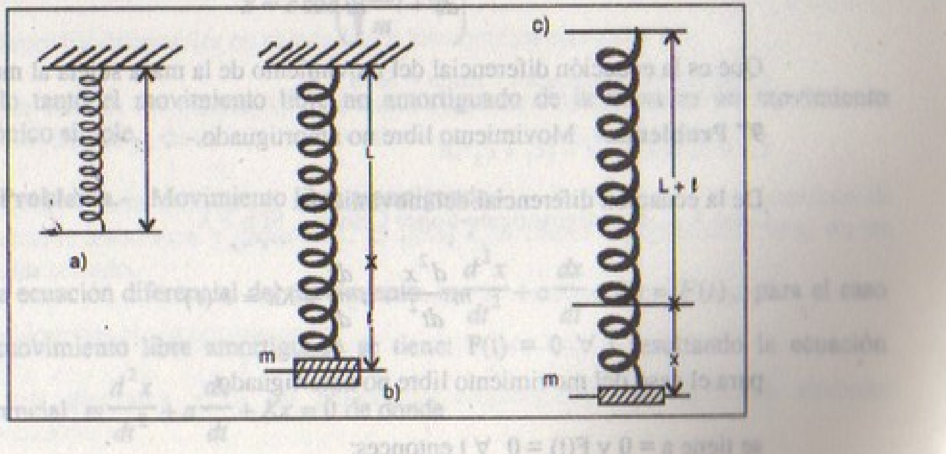
de donde F = K m a, donde a $= \frac{dv}{dt}$

La ley de Hooke establece que la magnitud de las fuerzas necesarias para producir una cierta elongación en un muelle es directamente proporcional a la elongación, supuesto que ésta no es demasiado grande, en forma matemática se tiene:

$$|F| = Ks$$

donde F es la magnitud de la fuerza, s la elongación y K es una constante de proporcionalidad a la que llamaremos constante del muelle.

Para formular el problema consideremos lo siguiente:



a) longitud natural L | b) masa en equilibrio, muelle con deformación $L + \ell$ | c) masa a una distancia x por debajo de posición de equilibrio; longitud del muelle con deformación $L + \ell + x$.

Ahora consideremos las fuerzas que actúan sobre la masa m.

1° La fuerza de gravedad $F_1 = mg$ g es la aceleración debido a la gravedad.

2° La fuerza recuperadora del muelle, por la ley de Hooke se tiene $F_2 = -K(x+\ell)$ por ser la fuerza recuperadora F_2 igual a la magnitud pero de sentido opuesto a las fuerzas de gravedad, y que para la posición x = 0, se tiene:

$$-mg = -K(0+\ell) \Rightarrow mg = K\ell \quad \text{por lo tanto} \quad F_2 = -Kx - mg$$

3° La fuerza de resistencia del medio llamado fuerza de amortiguamiento, que se expresa

así: $F_3 = -a\dfrac{dx}{dt}$, $a > 0$

4° Cualesquiera fuerzas exteriores que actúan sobre la masa que será expresado por $F_4 = F(t)$ ahora aplicando la segunda ley de Newton F = ma, donde

$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ se tiene: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg - Kx - mg - a\dfrac{dx}{dt} + F(t)$ de donde:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + Kx = F(t)$$

Que es la ecuación diferencial del movimiento de la masa sujeta al muelle.

9^er Problema.- Movimiento libre no amortiguado.-

De la ecuación diferencial del movimiento.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + Kx = F(t)$$

para el caso del movimiento libre no amortiguado

se tiene a = 0 y F(t) = 0 ∀ t entonces:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0 \quad \text{si, } \lambda^2 = K/m$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = 0$, **cuya solución es:**

$$x = c_1 \cos \lambda t + c_2 \operatorname{sen} \lambda t$$

donde c_1, c_2 constantes arbitrarias y para

$x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ **se tiene** $c_1 = \dfrac{v_0}{\lambda}$, $c_2 = x_0$

$$x = \frac{v_0}{\lambda}\cos \lambda t + x_0 \operatorname{sen} \lambda t$$

expresaremos en la forma siguiente:

$$x = c\left(\frac{v_0/\lambda}{c}\cos \lambda t + \frac{x_0}{c}\operatorname{sen} \lambda t\right)$$

donde $c = \sqrt{\left(\dfrac{v_0}{\lambda}\right)^2 + x_0^2} > 0$ **siendo** $\dfrac{v_0/\lambda}{c} = -\operatorname{sen}\phi$

$\dfrac{x_0}{c} = \cos\phi$ **obteniendo**

$$x = c\cos(\lambda t + \phi)$$

$$\therefore \quad x = c\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t + \phi\right)$$

por lo tanto el movimiento libre no amortiguado de la masa es un movimiento armónico simple.

10^mo Problema.- Movimiento libre amortiguado.-

De la ecuación diferencial del movimiento $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + a\dfrac{dx}{dt} + Kx = F(t)$, **para el caso del movimiento libre amortiguado se tiene: F(t) = 0 ∀ t resultando la ecuación diferencial** $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + a\dfrac{dx}{dt} + Kx = 0$ **de donde**

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\lambda^2x=0 \text{ siendo } 2b=\frac{a}{m},\ \lambda^2=\frac{K}{m}$$

para la solución de este problema se presenta tres casos que dependen del signo de $b^2-\lambda^2$.

Caso 1.- Movimiento Oscilatorio Amortiguado.-

Si $b<\lambda$ entonces la solución es:

$$x=e^{-bt}\left[c_1\operatorname{sen}\sqrt{\lambda^2-b^2}\,t+c_2\cos\sqrt{\lambda^2-b^2}\,t\right]$$

que también se puede expresar en la forma:

$$x=e^{-bt}\cos\left[\sqrt{\lambda^2-b^2}\,t+\phi\right] \text{ donde}$$

$c=\sqrt{c_1^2+c_1^2}>0$ y ϕ está determinado por las ecuaciones:

$$-\operatorname{sen}\phi=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$$

$$\cos\phi=\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$$

Caso 2.- Amortiguador Crítico.- Si $b=\lambda$

La solución es $x=(c_1+c_2t)e^{-bt}$

Caso 3.- Amortiguamiento Super Crítico.- Si $b>\lambda$

Entonces la solución es: $x=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$

donde $r_1=-b+\sqrt{b^2-\lambda^2}$, $r_2=-b-\sqrt{b^2-\lambda^2}$

11vo Problema.- Circuitos eléctricos.-

En las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a circuitos en serie contiene una fuerza electromotriz, elementos de resistencia, inducción y capacidad.

Una fuerza electromotriz (por ejemplo una batería o un generador) produce un flujo de corriente en un circuito cerrado y que esta corriente produce lo que se llama caída de tensión (o voltaje).

Para la caída de tensión en cada elemento de resistencia, inducción y capacidad se tiene las tres leyes siguientes:

1° La caída de tensión en un elemento de Resistencia es dado por $E_R = Ri$ donde R es una constante de proporcionalidad llamada resistencia e i la intensidad de la corriente.

2° La caída de tensión en un elemento de inducción es dado por: $E_L=L\frac{di}{dt}$ donde L es una constante de proporcionalidad llamada inductancia e i la intensidad de la corriente.

3° La caída de tensión en un elemento de capacidad o condensador es dado por: $E_c=\frac{1}{c}q$ donde c es una constante de proporcionalidad llamada capacitancia y q es la carga eléctrica instantánea en el condensador. Como $i=\frac{dq}{dt}$ entonces : $E_c=\frac{1}{c}\int i\,dt$

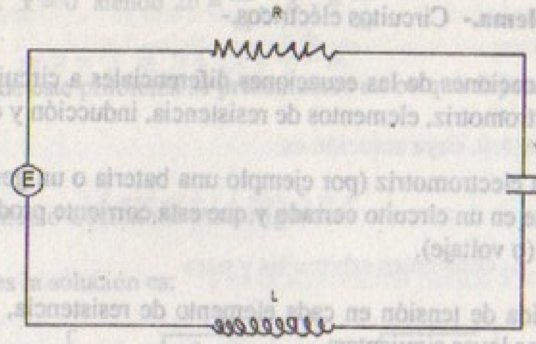
Las leyes fundamentales en el estudio de los circuitos eléctricos son:

a) Ley de Kirchh off (forma 1).- La suma algebraica de las caídas instantáneas de tensión, a lo largo de un circuito cerrado en un sentido específico es cero.

b) Ley de Kirchh off (forma 2).- La suma de las caídas de tensión en los elementos de inducción, resistencia y capacidad, es igual a la fuerza electromotriz total en un circuito cerrado.

Consideremos el circuito siguiente:

En este diagrama y en los posteriores emplearemos los siguientes símbolos convencionales.



E fuerza electromotriz (batería o generador)

R resistencia

L inductor

C Condensador

Aplicando la ley de Kirchh off, al circuito y utilizando las leyes de caidas de tensión se obtiene la ecuación: $L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{c}q=E$

Como $i=\frac{di}{dt}\Rightarrow\frac{di}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}$ entonces : $L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{c}q=E$

de esta ecuación se tiene: $L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{c}i=\frac{dE}{dt}$

Por lo tanto se tiene las dos ecuaciones.

Ecuaciones diferenciales para la carga q y la corriente i:

Si el circuito no tiene condensador la ecuación se reduce a: $L\frac{di}{dt}+Ri=E$

y asi se tiene inductor, la ecuación se reduce a: $R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{c}q=E$

Ejercicios Propuestos.-

1) En el extremo de un muelle espiral sujeto al techo, se coloca un peso de 8 libras. El peso queda en resposo en su posición de equilibrio, en la que el muelle se ha alargado 6 pulgadas. A continuación, el peso se desplaza 3 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se abandona en t = 0 con una velocidad inicial de 1 pie/seg, dirigida hacia abajo. Despreciando la resistencia del medio y suponiendo que no existen fuerzas exteriores, determinar la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento resultante:

Rpta:
- *Amplitud del movimiento* $\sqrt{5/8}$ *pie*
- *el periodo* $2(\pi/8)=\pi/4$ *seg.*
- *frecuencia es* $4/\pi$ *oscilaciones / seg.*

2) En el extremo inferior de un muelle espiral sujeto al techo se suspende un peso de 12 libras. El peso queda en reposo en su posición de equilibrio, en la que el muelle queda alargado 1.5 pulgadas. A continuación se lleva el peso 2 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio y se abandona partiendo del resposo en t = 0. Hallar el desplazamiento del peso en función del tiempo. Determinar la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento resultante.

Rpta: $x=\frac{\cos 16t}{6}$, $\frac{1}{6}$ *pies*, $\frac{\pi}{8}$, *oscilaciones / seg.*

3) Al extremo inferior de un muelle espiral suspendido del techo se liga un peso de 4 lbs. El peso queda en su posición de equilibrio en la que el muelle está alargado 6 pulgadas. En el instante t = 0 se golpea el peso de modo que se pone en movimiento con una velocidad inicial de 2 pies/seg. dirigida hacia abajo.

a) Determinar el desplazamiento resultante y la velocidad del peso en función del tiempo.

b) Hallar la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento.

c) Determinar los instantes en los que el peso se encuentra 1.5 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio y moviendose hacia abajo.

d) Determinar los instantes en que se encuentra 1.5 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio y movimiento hacia arriba.

Rpta: *a)* $x=-\frac{\operatorname{sen} 8t}{4}$

b) $\frac{1}{4}$ *pies*; $\frac{\pi}{4}$ *seg*, $\frac{4}{\pi}$ oscilaciones/seg.

c) $t=\frac{\pi}{48}+\frac{n\pi}{4}$ $(n=,0,1,2,\ldots)$

d) $t = \frac{5\pi}{48} + \frac{n\pi}{4}$ $(n = 0,1,....)$

4) La naturaleza de un muelle espiral es tal que un peso de 225 lbs. le deforma 6 pulgadas. El muelle se encuentra suspendido del techo, a su extremo inferior se liga un peso de 16 lbs. que, a continuación, queda en su posición de equilibrio. Entonces se lleva a una posición 4 pulgadas por debajo de la del equilibrio y se abandona en t = 0 con una velocidad inicial de 2 pies/seg. dirigida hacia abajo.

a) Determinar el desplazamiento resultante como función del tiempo.

b) Hallar la amplitud, período y frecuencia del movimiento resultante.

c) ¿En qué instante atraviesa el peso su posición de equilibrio y cuál es su velocidad en ese instante?

Rpta: a) $x = -\frac{\operatorname{sen}10t}{5} + \frac{\cos 10t}{3}$

b) $\frac{\sqrt{34}}{15}$ *pies*; $\frac{\pi}{5}$ *(seg)*, $\frac{5}{\pi}$ oscilaciones/seg.

c) 0.103 *seg*. −3.888 pies/seg.

5) De un resorte vertical cuya constante de rigidez es igual a 300 Kg/m. se suspende un peso de 118 Kg. Si el peso se levanta 76.6 mm. sobre su posición de equilibrio y luego se le suelta, calcular el instante en que el peso se halla a 38.3 mm. debajo de su posición de equilibrio y moviendose hacia abajo. Halle también la amplitud, período y frecuencia del movimiento.

Rpta: $x = 7.66\ \operatorname{sen}(5t + 3\pi/2)$, *amplitud* 7.66 *cm.*
el periodo $2\pi/5$, *la frecuencia* $5/2\pi$ *ciclos / seg.*

6) Un peso de 1.84 Kg. suspendido de un resorte lo estira 76.5 mm. se tira del peso hasta bajarlo 153 mm. de su posición de equilibrio y luego se le suelta. Suponiendo que el peso actúa una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 3 v kg. siendo v la velocidad instantánea en m/seg, hallar la ecuación del movimiento del peso después de haberlo soltado.

Rpta: $x = 0.153\ \sqrt{2}e^{-8t}\ \operatorname{sen}(8t + \pi/4)$

7) Una masa de 100 gr. se suspende de un extremo de un resorte y el otro extremo se suspende de un soporte fijo dejando que el sistema alcance el reposo. En la posición de equilibrio el resorte se estira 5 cm. La masa se tira 5 cm. hacia abajo y se suelta con una velocidad de 7 cm/seg. Encuentre la ecuación del movimiento de este sistema para las siguientes fuerzas de amortiguamiento.

a) $2{,}800\ \frac{dx}{dt}\ gr - cm/seg^2$

b) $3{,}500\ \frac{dx}{dt}\ gr - cm/seg^2$

Rpta: a) $x = (5 + 77t)e^{-14t}$
b) $x = 7e^{-7t} - 2e^{-28t}$

8) Una masa m se proyecta verticalmente hacia arriba desde "O" con una velocidad inicial v_0. Hallar la altura máxima alcanzada, suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad.

Rpta: altura máxima $x = \frac{1}{k}\left[v_0 - \frac{g}{k} Ln\left(\frac{g + kv_0}{g}\right)\right]$

9) Se ha colocado una cadena sobre una clavija pulida, colgando, de un lado 8 dm. y del otro 12 dm. Hallar el tiempo que la cadena tarda, al resbalar, en caerse.

a) Si se prescinde del rozamiento.

b) Si el rozamiento es igual al peso de 1 dm. de cadena.

Rpta: a) $t = \sqrt{\frac{10}{g}}\, arc\cosh\frac{1}{2}(x+2) = \sqrt{\frac{10}{g}}\, Ln\frac{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$

b) $t = \sqrt{\frac{10}{g}}\, Ln\frac{2}{3}(x + 3/2 + \sqrt{x^2 + 3x})$

10) En el extremo inferior de un muelle sujeto al techo se fija un peso de 32 libras. El peso queda en reposo en su posición de equilibrio, en la que el alargamiento del muelle es de 2 pies. A continuación se lleva dicho peso 6 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se abandona t = 0, no existe fuerzas exteriores, pero la resistencia del medio en libras es numéricamente igual a $4\frac{dx}{dt}$, donde $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad instantánea en pies por segundo. Determinar el movimiento resultante para el peso pendiente del muelle.

$$Rpta:\ x=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-2t}\cos(2\sqrt{3}t-\pi/6)$$

11) Al extremo inferior de un muelle espiral suspendido del techo se sujeta un peso de 8 lbs. que queda en reposo en su posición de equilibrio con el muelle alargado 0.4 pies, se lleva entonces el peso 6 pulgadas por debajo de dicha posición de equilibrio y se abandona en t = 0. La resistencia del medio es, en libras, numéricamente igual a $2\frac{dx}{dt}$ donde $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad instantánea en pies por segundo.

a) Escribir la ecuación diferencial del movimiento, así como las condiciones iniciales.

b) Resolver el problema de valores iniciales planteado en la parte a) para determinar el desplazamiento del peso en función del tiempo.

Rpta: a) $\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+20x=0,\ x(0)=1/2,\ x'(0)=0$

b) $x=e^{-4t}\left(\frac{\text{sen}\,8t}{4}+\frac{\cos 8t}{2}\right)$

12) En el extremo inferior de un muelle espiral suspendido de un soporte fijo se coloca un peso de 8 lbs. El peso queda en reposo en su posición de equilibrio, posición en la que el muelle se encuentra deformado 6 pulgadas. A continuación se desplaza el peso 9 pulgadas por debajo de dicha posición y se abandona en t = 0. El medio ofrece una resistencia que es, en libras, numéricamente igual a $4\frac{dx}{dt}$, siendo $\frac{dx}{dt}$ la velocidad instantánea en pies por segundo. Determinar el desplazamiento del peso en función del tiempo.

$$Rpta:\ x=(6t+3/4)e^{-8t}$$

13) Se ha suspendido un peso de 7.26 Kg. cuya constante de rigidez es 7.44 Kg/m. se aplica una fuerza externa dada por F(t) = 10.9 sen10t, t ≥ 0, se supone que actúa una fuerza de amortiguamiento que expresada en Kg. es numéricamente igual a 5.95 v, siendo v la velocidad instantánea del peso en m/seg. inicialmente el peso se encuentra en reposo en su posición de equilibrio. Halle la posición del peso en cualquier instante.

Rpta: $x=0.2925e^{-1.55t}-0.212e^{-6.45t}-0.0915\,\text{sen}\,10t-0.0813\cos 10t$

14) Se suspende un peso de 14.5 Kg. de un resorte vertical cuya constante de rigidez es 5.95 Kg/m. se aplica una fuerza F(t) = 7.26 sen 2t, t ≥ 0. Suponiendo que cuando t = 0 el cuerpo se encuentra en reposo en su posición de equilibrio y que la fuerza amortiguadora es despreciable, determine la posición y la velocidad del peso en cualquier instante.

Rpta: x = 0.61 sen 2t - 1.22 t cos 2t
y = 2.44 sen 2t

15) Una viga horizontal de 2ℓ metros de longitud está apoyada en sus extremos. Hallar la ecuación de su curva y su máxima deformación vertical (flecha) cuando tiene una carga uniformemente distribuida de ω Kg/m.

Rpta: $y=\frac{\omega}{24\ EI}(4\ell x^3-x^4-8\ell^3x)$

$$-y\ max=\frac{5\omega\ \ell^4}{24\ EI}$$

16) Resolver el problema 15) si actúa, además, una carga de W Kg en medio de la viga.

Rpta: $y=\frac{\omega}{24\ EI}(4\ell x^3-x^4-8\ell^3x)+\frac{W}{12\ EI}(3\ell x^2-|\ell-x|^3-6\ell^2x+\ell^3)$

$$-y\ max=\frac{5\omega\ \ell^4}{24\ EI}+\frac{W\ \ell^3}{6\ EI}$$

17) Una viga horizontal de ℓ metros de longitud está empotrada en un extremo y libre en el otro. Hallar la ecuación de su curva elástica y la flecha máxima si la carga uniformemente repartida es ω Kg/m.

Rpta: $y=\frac{\omega}{24\ EI}(4\ell x^3-6\ell^2x^2-x^4)$

$$-y\ max=\frac{\omega\ \ell^4}{8\ EI}$$

18) Una viga horizontal de ℓ metros de longitud está empotrada en ambos extremos. Hallar la ecuación de la curva elástica y la flecha máxima si tiene una carga uniformemente distribuida de ω Kg/m.

Rpta: $y=\frac{\omega\ x^2}{24\ EI}(2\ell x-\ell^2-x^2)$

$$-y\ max = \frac{\omega\ \ell^4}{384\ EI}$$

19) Resolver el problema 18) si además actúa un peso W Kg. en el punto medio de la viga.

Rpta: $y = \frac{\omega}{24\ EI}(2\ell x^3 - \ell^2 x^2 - x^4) + \frac{W}{48\ EI}(\ell^3 - 6\ell^2 x + 9\ell x^2 - 4x^3),\ \frac{\ell}{2} \le x \le \ell$

$$-y\ max = \frac{1}{384\ EI}(\omega\ \ell^4 + 2W\ell^3)$$

20) Una viga de longitud 3ℓ está libremente apoyada en los extremos. Hay una carga uniforme ω por unidad de longitud y carga ω aplicada a una distancia ℓ de cada extremo. Tome el origen en el punto medio de la viga y halle la ecuación de la curva elástica y la máxima de flexión.

Rpta: $y = \frac{1}{EI}\left[\frac{\omega}{2}\left(\frac{9}{8}\ell^2 x^2 - \frac{x^4}{12}\right)\right] + \omega\left(\frac{3}{4}\ell x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{\ell^2 x}{8} + \frac{\ell^3}{48}\right),\ \frac{\ell}{2} \le x \le \frac{3\ell}{2}$

$$-y\ max = \frac{1}{384EI}(405\omega\ \ell^4 + 368\omega\ \ell^3)$$

21) Un circuito eléctrico consta de una inductancia de 0.1 henrios, una resistencia de 20 ohmios, y un condensador cuya capacidad es de 25 microfaradios (1 microfaradio = 10^{-6} faradios). Hallar la carga de q y la corriente y en el tiempo t, siendo las condiciones iniciales:

a) q = 0.05 coulombios, $i = \frac{dq}{dt} = 0$, para t = 0

b) q = 0.05 coulombios, i = -0.2 amperios para t = 0

Rpta: a) $q = e^{-100t}(0.05\cos 624.5t + 0.008\,\text{sen}\,624.5t)$

$i = -0.32e^{-100t}\ \text{sen}\,624.5t$

b) $q = e^{-100t}(0.05\cos 624.5t + 0.0077\,\text{sen}\,624.5t)$

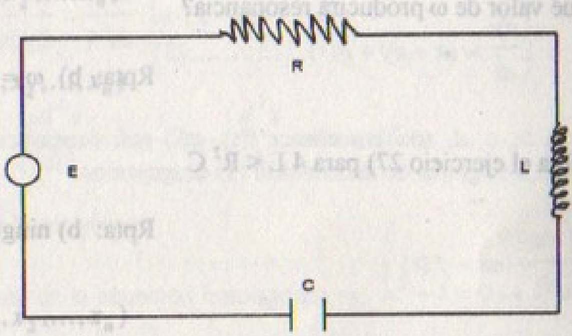
$i = e^{-100t}(-0.2\cos 624.5t - 32.0\,\text{sen}\,624.5t)$

22) Un circuito consta de una inductancia de 0.05 henrios, una resitencia de 20 ohmios, un condensador cuya capacidad es de 100 microfaradios y una f.e.m. de E = 100 voltios. Hallar i y q siendo las condiciones iniciales q = 0, i = 0 para t = 0.

Rpta: $q = e^{-200t}(-0.01\cos 400t - 0.005\,\text{sen}\,400t) + 0.01$

$i = 5e^{-200t}\ \text{sen}\,400t$

23) Sea L = 10 henry (h), R = 250 ohms (r), C = 10^{-3} farads (f) y E = 900 volts. (v) en el circuito de la figura. Suponga que no hay carga presente y que no está fluyendo corriente en el momento t = 0 en que se aplica E, calcule la corriente y la carga para todo valor t > 0.



Rpta: $I(t) = 6(e^{-5t} - e^{-20t})$

$$Q(t) = \frac{1}{10}(9 - 12e^{-5t} + 3e^{-20t})$$

24) En los ejercicios, halle la corriente de estado estacionario en el circuito RLC de la figura de 23) donde:

a) L = 5 henrys,	R = 10 ohms,	C = 0.1 farad,	E = 25 sen t volts.
b) L = 10 henrys,	R = 40 ohms,	C = 0.025 farad,	E = 100 cos 5 t volts.
c) L = 1 henrys,	R = 7 ohms,	C = 0.1 farad,	E = 100 sen 10 t volts.
d) L = 2.5 henrys,	R = 10 ohms,	C = 0.08 farad,	E = 100 cos 5 t volts

25) Halle la corriente transitoria en el circuito RLC de la figura de 23) para los ejercicios de 24).

26) Dado que L = 1 henrys, R = 1200 ohms, C = 10^{-6} farad, Y(0) = Q(0) = 0 y E = 100 sen 600 t, volts, determíne la corriente transitoria y la corriente de esta estacionario.

$$\text{Rpta: } I_T = \frac{e^{-600t}}{2320}(297\,\text{sen}\,800t - 96\cos 800t)$$

$$I_E = \frac{1}{580}(24\cos 600t - 27\,\text{sen}\,600t)$$

27) Se conecta una inductancia de L henrios, una resistencia R ohms. y una capacitancia C farads, en serie con una f.e.m. de E_0 sen ω t volts, suponga que $Q(0) = I(0) = 0$ y $4L > R^2C$.

a) Halle la expresión para Q(t) y I(t).

b) ¿Qué valor de ω producirá resonancia?

$$\text{Rpta: b) } \omega = \frac{\sqrt{(4L/c) - R^2}}{2L}$$

28) Resuelva el ejercicio 27) para $4L < R^2C$

Rpta: b) ningún ω produce resonancia.

CAPITULO VIII

8.- SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES CONSTANTES.-

Un sistema de "n" ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en las funciones incógnitas.

$x_1 = \psi_1(t),\ x_2 = \psi_2(t), \ldots, x_n = \psi_n(t)$ es de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

NOTACION VECTORIAL

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in v_n$$

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

donde $x_1 = \psi_1(t), \ldots, x_n = \psi_n(t)$ son diferenciables y con derivadas continuas en (a,b) llamadas solución del sistema.

Un sistema de "n" ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de "n" funciones incógnitas se puede escribir en la forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}(t) + b_i(t);$$

Si $b_i(t)=0$, el sistema se llama homogénea y si $b_i(t)\neq 0$ el sistema se llama no homogénea. Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales existen los siguientes métodos:

METODO: Reducción de un Sistema a una Ecuación Diferencial de n-Esimo Orden.-

Consideremos un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

donde a, b, c ,d, son constantes f(t), g(t) son funciones conocidas: x(t), y(t) son funciones incógnitas de la ecuación (1) despejamos

$$y = \frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right)$$

reemplazando y en (2) se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right)\right] = cx + \frac{d}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right) + g(t)$$

$$\frac{1}{b}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{adx}{dt} - \frac{d}{dt}(f(t)) - cx - \frac{d}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right) - g(t) = 0$$

simplificando se tiene:

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + cx = R(t)$$

donde A, B, C son constante que es una ecuación diferencial de coeficientes constantes.

Ejemplo.-

1.- Resolver :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3 - 2y \ldots (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2t \ldots (2) \end{cases}$$

<u>**Solución**</u>

De (1) se tiene $y = \dfrac{1}{2}\left(3 - \dfrac{dx}{dt}\right)$ Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}\right) = 2x - 2t$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = 2x - 2t \to \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 4t$$

es una ecuación no homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es: $r^2 + 4 = 0 \to r_1 = 2i,\ r_2 = -2i$.

La solución general de la ecuación homogénea es: $x_g = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$.

La solución particular es: $x_p = At + B$

$\dot{x}_p = A \to \ddot{x}_p = 0 \to 0 + 4(At + B) = 4t$

$4A = A \to A = 1, B = 0 \to x_p = t$

La solución general de la ecuación no homogénea es:

$x = x_g + x_p = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + t$

2. Resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Solución

De (1) se tiene $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{dx}{dt}\right)$ reemplazando en (2)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{dx}{dt}\right)\right]=x+\frac{3}{2}\left(x-\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}=x+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+\frac{5}{2}x=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+5x=0$$

El polinomio característico es $P(r) = r^2 - 4r + 5 = 0$

$$\to r_1=2+i,\ r_2=2-i$$

La solución general es: $x_g=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$

es decir: $x_g=c_1e^{2x}\cos x+c_2e^{2x}\operatorname{sen}x$

3. Resolver:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+3x+y=0\ldots\ldots\ldots(1)\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}-x+y=0\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}\qquad x(0)=y(0)=1$$

de (2) despejamos x es decir $x=y+\frac{dy}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\left(y+\frac{dy}{dt}\right)+3\left(y+\frac{dy}{dt}\right)+y=0$$

$$\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}+4y+3\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=0$$

Polinomio caracteristico $P(r) = r^2 + 4r + 4 = 0$

$r = -2$ de multiplicidad 2.

$$x=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t},\ x(0)=1\to c_1=1$$

$$-2c_1e^{-2t}-2c_2te^{-2t}+c_2e^{-2t}+3c_1e^{-2t}+3c_2te^{-2t}+y(t)=0$$

$$c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+c_2e^{-2t}+y(t)=0$$

$$e^{-2t}+c_2te^{-2t}+c_2e^{-2t}+1=0\to 1+c_2+1=0$$

$$c_2=-2$$

la solución es $x=e^{-2t}-2te^{-2t}$, análogamente para

$$y=e^{-2t}(1+2t)$$

4. **Resolver:**

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-\dfrac{1}{2}y-3t^2-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{3}{2}\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=2y-2t-1\end{cases}$$

Solución

$$\frac{1}{2}y=3x-\frac{dx}{dt}-3t^2-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}-3t-\frac{1}{4}=12x-4\frac{dx}{dt}-12t^2-2t+6-2t-1$$

$$6\frac{dx}{dt}-2\frac{d^2x}{dt^2}-12t-1=12x-4\frac{dx}{dt}-12t^2-4t+5$$

$$2\frac{d^2x}{dt^2}-10\frac{dx}{dt}+12x=12t^2-8t-6$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-5\frac{dx}{dt}+6x=6t^2-4t-3 \to r^2-5r+6=0$$

$$\to r=2,\ r=3;\ x_g=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}$$

$$x_p=At^2+Bt+c$$

$$x_p=9At+B \to x_p=2A$$

$$2A-10At-5B+6At^2+6Bt+6c=6t^2-4t-3$$

$6A = 6 \to A = 1$

$(-10A + 6B) = -4 \quad \to \quad B = 1$

$2A - 5B + 6C = -3$

$2 - 5 + 6C = -3$

$C = 0$

$$x=x_g+x_p$$

$$x=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}+t^2+t$$

METODO: Matricial para Sistema de Primer Orden con Coeficientes Constantes.- Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \ldots\ +a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \ldots\ +a_{2n}x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ \ldots+a_{nn}x_n \end{cases} \quad \ldots(1)$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones es de la forma:

$$x_1=\beta_1e^{rt},\ x_2=\beta_2e^{rt},\ldots,x_n=\beta_ne^{rt}$$

donde $\beta_i,\ i=1,\ldots,n$ **son constantes**

Como

$$\left.\begin{aligned} x_1=\beta_1e^{rt} &\to \frac{dx_1}{dt}=\beta_1re^{rt} \\ x_2=\beta_2e^{rt} &\to \frac{dx_2}{dt}=\beta_2re^{rt} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_n=\beta_ne^{rt} &\to \frac{dx_n}{dt}=\beta_nre^{rt} \end{aligned}\right\} \ldots(2)$$

Reemplazando (2) en (I) se obtiene:

$$\begin{cases} \beta_1re^{rt}=a_{11}\beta_1e^{rt}+a_{12}\beta_2e^{rt}+\ldots+a_{1n}\beta_ne^{rt} \\ \beta_2re^{rt}=a_{21}\beta_2e^{rt}+a_{22}\beta_2e^{rt}+\ldots+a_{2n}\beta_ne^{rt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_nre^{rt}=a_{n1}\beta_1e^{rt}+a_{n2}\beta_2e^{rt}+\ldots+a_{nn}\beta_ne^{rt} \end{cases}$$

simplificando se obtiene:

$$\begin{cases} \beta_1r=a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+\ldots+a_{2n}\beta_n \\ \beta_2r=a_{21}\beta_1+a_{22}\beta_2+\ldots+a_{2n}\beta_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_nr=a_{n1}\beta_1+a_{n2}\beta_2+\ldots+a_{nn}\beta_n \end{cases}$$

$$(\alpha)\quad \begin{cases} (a_{11}-r)\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1n}\beta_n = 0 \\ a_{21}\beta_1 + (a_{12}-r)\beta_2 + \ldots + a_{2n}\beta_n = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \ldots + (a_{nn}-r)\beta_n = 0 \end{cases}$$

α es un sistema de ecuaciones homogéneas y tiene solución no nula si y solo si:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{12}\cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}-r \end{vmatrix} = 0$$

Luego P(r) = 0 valores propios del sistema y cada valor de r determinará β_1.
Veremos para el caso de 3 ecuaciones.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + cz \\ \dfrac{dy}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z \\ \dfrac{dz}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z \end{cases}$$

Las soluciones son $x = \lambda e^{rt}$, $y = ue^{rt}$, $z = ne^{rt}$
donde λ, u, n, r, son constantes.

$$\begin{cases} x = \lambda\, e^{rt} \to \dfrac{dx}{dt} = \lambda\, re^{rt} \\ y = ue^{rt} \to \dfrac{dy}{dt} = ue^{rt} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (3) \\ z = ne^{rt} \to \dfrac{dz}{dt} = ue^{rt} \end{cases}$$

Reemplazando (3) en (1) se obtiene:

$$\begin{cases} \lambda re^{rt} = a\lambda e^{rt} + b\ u\ e^{rt} + c\ ne^{rt} \\ u\ re^{rt} = a_1\lambda e^{rt} + b_1\ u\ e^{rt} \\ nre^{rt} = a_2\lambda e^{rt} + b_2\ u\ e^{rt} + c_2\ ne^{rt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda r = a\lambda + b\ u + c\ n \\ u\ r = a_1\lambda + b_1\ u + c_1 n \\ nr = a_2\lambda + b_2\ u + c_2 n \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-r)\lambda + b\ u + c\ n = 0 \\ a_1\lambda + (b_1 - r)u + cn = 0 \\ a_2\lambda + b_2\ u + (c_2 - r)n = 0 \end{cases}$$

Luego:

$$p(r) = \begin{vmatrix} a-r & b & c \\ a_1 & b_1 - r & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 - r \end{vmatrix} = 0 \to P(r) = 0$$

Si r_1, r_2, r_3 son las raíces del polinomio

P(r) = 0 Si $r = r_1$, se resuelve el sistema y se obtiene: λ_1, u_1, n_1

Si $r = r_2$, se resuelve el sistema y se obtiene: λ_2, u_2, n_2

Si $r = r_3$, se resuelve el sistema y se obtiene: λ_3, u_3, n_3

Obteniéndose las soluciones particulares:

$$x_1 = \lambda_1 e^{r_1 t},\ y_1 = u_1 e^{r_1 t},\ z_1 = n_1 e^{r_1 t}$$

$$x_2 = \lambda_2 e^{r_2 t},\ y_2 = u_2 e^{r_2 t},\ z_2 = n_2 e^{r_2 t}$$

$x_3 = x_3 e^{r_2 t}$, $x_3 = u_3 e^{r_3 t}$, $z_3 = n_3 e^{r_3 t}$

La solución general es:

$$\begin{cases} x = c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 z_1 \\ y = c_1 x_2 + c_2 y_2 + c_3 z_2 \\ z = c_1 x_3 + c_2 y_3 + c_3 z_3 \end{cases}$$

Ejemplos.-

1.- Resolver:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y + 3z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y - z$$

$$\frac{dz}{dt} = y - z$$

Solución

$$p(r) = \begin{vmatrix} 2-r & -1 & 3 \\ 1 & 1-r & -1 \\ 0 & 1 & -1-r \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{matrix} r_1 = 1 \\ r_2 = -1 \\ r_3 = 2 \end{matrix}$$

2.- Resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 3z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = y - z \end{cases}$$

Solución

$$p(r) = \begin{vmatrix} a-r & b & c \\ a_1 & b_1 - r & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 - r \end{vmatrix} = 0$$

$$p(r) = \begin{vmatrix} 2-r & -1 & 3 \\ 1 & 1-r & -1 \\ 0 & 1 & -1-r \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-r)[-(1-r)(1+r)+1] + (-1-r) + 3 = 0$$

$$(2-r)[-(1-r^2)+1] + 2 - r = 0 \rightarrow (2-r)r^2 + (2-r) = 0$$

$$\rightarrow (r^2+1)(2-r) = 0 \quad \rightarrow \quad r = 2$$

$$\begin{cases} (a-r)\lambda + b\ u + c\ n = 0 \\ a_1\lambda + (b_1 - r)u + c_1 n = 0 \\ a_2\lambda + b_2\ u + c_2 n = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} 0\ \lambda - u + 3n = 0 \\ \lambda - u - n = 0 \\ 0\ \lambda + u - 3n = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} u = 3n \\ \lambda = 4n,\ n = 1 \\ u = 3,\ \lambda = 4 \end{matrix}$$

Ejercicios Propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios:

1)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 9x + 2y \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + t \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2t \end{cases}$ $\quad x(0) = -\dfrac{7}{9}$, $\quad y(0) = -\dfrac{5}{9}$

8) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$ $\quad x(\pi) = -1$, $\quad y(\pi) = 0$

9) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = e^{-t} - y \\ \dfrac{2dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen} t - 2y \end{cases}$ $\quad x(0) = -2$, $\quad y(0) = 1$

10) $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} = 6x - y - 6t^2 - t + 3 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - 2t - 1 \end{cases}$ $\quad x(0) = 2$, $\quad y(0) = 3$

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases}$

15) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + y \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y + e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + e^{-t} \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y + t + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + t - 1 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y + 3te^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + e^{t} \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

20) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$

21) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-3y\\ \frac{dy}{dt}=3x+y\end{cases}$

22) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=4x-2y\\ \frac{dy}{dt}=5x+2y\end{cases}$

23) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}-2x+2\frac{dy}{dt}=2-4e^{2t}\\ 2\frac{dx}{dt}-3x+3\frac{dy}{dt}-y=0\end{cases}$

24) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=5x+4y\\ \frac{dy}{dt}=-x+y\end{cases}$

25) $\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}+x-2\frac{dy}{dt}=2t\\ 2\frac{dx}{dt}-x+\frac{dy}{dt}-2y=7\end{cases}$

26) $\begin{cases}Dx-(D+1)y=e^{-t}\\ x+(D-1)y=e^{2t}\end{cases}$

27) $\begin{cases}(D+2)x+(D+1)y=t\\ 5x+(D+3)y=t^2\end{cases}$

28) $\begin{cases}(D+1)x+(2D+7)y=e^t+2\\ -2x+(D+3)y=e^t-1\end{cases}$

29) $\begin{cases}(D-1)x+(D+3)y=e^{-t}-1\\ (D+2)x+(D+1)y=e^{2t}+t\end{cases}$

CAPITULO IX

9. RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

Procedimientos.- El método para obtener la solución de una ecuación diferencial en serie de potencias es similar a la técnica de los coeficientes indeterminados para ello se necesita conocer la derivada de una serie de potencias y de las propiedades de series de potencias.

1) $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} x^{k+2}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$

3) $\sum_{n=k}^{\infty} a_{n+m} x^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m+k} x^{n+p+k}$

El proceso para obtener la solución en serie de potencia de una ecuación diferencial veremos mediante el siguiente ejemplo.

Hallar la solución en serie de potencias de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}-2xy=0$.

Solución

Suponiendo que la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}-2xy=0 \quad \ldots\ldots(1)$$

en serie de potencia es: $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \ldots\ldots(2)$

ahora determinaremos los coeficientes c_n, para que (2) converja a una función que satisfaga (1) para esto derivamos (2) término a término, es decir:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial (1)

$$\frac{dy}{dx}-2xy=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}-2x\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

en seguida debemos de igualar las potencias y se obtiene aplicando las propiedades de las series de potencias

$$\frac{dy}{dx}-2xy=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n=0$$

ahora igualamos los inicios es decir:

$$\frac{dy}{dx}-2xy=c_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2c_{n-1}x^n=0$$

Luego efectuamos la suma de las series

$$c_1+\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)c_{n+1}-2c_{n-1})x^n=0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualamos término a término se tiene:

$$c_1=0$$

$$(n+1)c_{n+1}-2c_{n-1}=0 \quad \text{para} \quad n=1,2,3,\dots$$

$$c_{n+1}=\frac{2c_{n-1}}{n+1} \quad \text{se llama fórmula de recurrencia}$$

para

$n=1$, $c_2=\dfrac{2c_0}{2}=c_0$

$n=2$, $c_3=\dfrac{2c_1}{3}=0$

$n=3$, $c_4=\dfrac{2c_2}{4}=\dfrac{c_2}{2}=\dfrac{c_0}{2}=\dfrac{c_0}{2!}$

$n=4$, $c_5=\dfrac{2c_3}{6}=0$

$n=5$, $c_6=\dfrac{2c_4}{6}=\dfrac{c_0}{2.3}=\dfrac{c_0}{3!}$

$n=6$, $c_7=\dfrac{2c_5}{7}=0$

$n=7$, $c_8=\dfrac{2c_6}{8}=\dfrac{c_0}{3!4}=\dfrac{c_0}{4!}$

como $\quad y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\dots$

$$y=c_0+c_0x^2+\frac{c_0}{2!}x^4+\frac{c_0}{3!}x^6+\frac{c_0}{4!}x^8+\dots$$

$$y=c_0\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\dots\right)=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$$

Que es la solución de la ecuación diferencial.

9.1. Solución de las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden entorno a puntos ordinarios.-

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \quad \dots\dots \ (1)$$

la ecuación (1) se escribe en la forma.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \quad \dots\dots\dots\dots \ (2)$$

donde $P(x)=\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$ y $Q(x)=\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$

para obtener la solución de la ecuación diferencial (1) entorno a puntos ordinarios daremos las siguientes definición.

Función Analítica.- Una función f(x) se dice que es analítica en $x = x_0$, si se puede representar en serie de potencia en $(x - x_0)$ con radio de convergencia $R > 0$.

Observación General.- Las funciones elementales (todas las funciones que conocemos) se puede escribir como una serie de Taylor y por lo tanto serán análiticas.

Definición.- Se dice que $x = x_0$ es una <u>punto ordinario</u> de la ecuación (1) si P(x) y Q(x) tienen una serie de potencia en $(x - x_0)$ con un radio de convergencia $R > 0$.

Si un punto no es punto ordinario, se dice que es un <u>punto singular</u> de la ecuación.

Ejemplo.- En la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}+e^x\frac{dy}{dx}+(\operatorname{sen} x)y=0$, todo valor finito de x es un punto ordinario. En particular vemos que x = 0 es un punto ordinario puesto que $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+...$ y $\operatorname{sen} x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...$ convergencia para todo valor finito de x.

Ejemplo.- La ecuación diferencial $x\frac{d^2y}{dx^2}+(\operatorname{sen} x)y=0$ tiene un punto ordinario en x = 0 puesto que se puede demostrar que $Q(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene el desarrollo en serie de potencias $Q(x)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+...$ que converge para todos los valores finitos de x.

Ejemplo.- La ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}+(Ln\ x)y=0$, tiene un punto singular en x = 0, puesto que Q(x) = Ln x no tiene un desarrollo en serie de potencia de x.

Observación.- Estudiaremos primeramente el caso en que la ecuación

$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$, sus coeficientes son polineales y no tiene factores comunes, un punto $x = x_0$ es.

i) Un punto ordinario si $a_2(x_0) \neq 0$

ii) Un punto singular si $a_2(x_0) = 0$

Ejemplo.-

a) Los puntos singulares de la ecuación diferencial $(x^2-4)y''+2xy'+6y=0$ son las soluciones de $x^2-4=0$ es decir $x = \pm 2$, todos los otros valores finitos de x son puntos ordinarios.

b) Los puntos singulares no necesariamente son números reales. La ecuación $(x^2+4)y''+xy'-y=0$, tiene puntos singulares para las soluciones de $x^2+4=0$ es decir $x = \pm 2i$, todos los otros valores finitos de x, reales ó complejos, son puntos ordinarios.

Notas.- Ahora encontraremos soluciones en serie de potencia entorno a puntos ordinarios para ecuaciones diferenciales de tipo (1) y para esto enunciaremos el siguiente teorema sin demostrarlo.

Teorema.- Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial

$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$, siempre podemos encontrar dos soluciones distintos en serie de potencias, que son de la forma $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$.

Una solución en serie converge por lo menos para $|x - x_0| < R_1$, donde R_1 es la distancia al punto singular más cercano, para resolver una ecuación diferencial de segundo orden $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$, buscamos dos conjuntos diferentes de coeficientes c_n de modo que se tenga dos series de potencias linealmente independientes $y_1(x)$ y $y_2(x)$, ambas desarrolladas entorno al mismo punto ordinario $x = x_0$.

Luego la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Ejemplo.- Resolver la ecuación diferencial de segundo orden.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2xy=0$$

<u>**Solución**</u>

Nota.- Para simplificar, supondremos que un punto ordinario está siempre localizado en x = 0, ya que si no la está, la sustitución $t = x - x_0$ traslada el valor $x = x_0$ a $t = 0$.

Si x = 0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial entonces $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es la solución en serie de potencias de la ecuación dada de donde.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

por lo tanto al reemplazar se tiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} = 0$$

ahora debemos de igualar las potencias y para esto se aplica las propiedades de las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n-1}x^n = 0$$

Luego igualando los inicios es decir:

$$1.2.c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n-1}x^n = 0$$

ahora efectuaremos la suma algebraica de las series

$$1.2.c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}((n+2)(n+1)c_{n+2} - 2c_{n-1})x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando término a término se tiene:

$$1.2\, c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$(n+2)(n+1)\, c_{n+2} - 2\, c_{n-1} = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

La ultima expresión es equivalente a.

$$c_{n+2} = \frac{2c_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ahora iterando se tiene.

n = 1, $\quad c_3 = \frac{2c_0}{2.3} = \frac{2c_0}{2.3}$

n = 2, $\quad c_4 = \frac{2c_1}{3.4}$

n = 3, $\quad c_5 = \frac{2c_2}{4.5} = 0$

n = 4, $\quad c_6 = \frac{2c_3}{5.6} = \frac{2^2 c_0}{2.3.5.6}$

n = 5, $\quad c_7 = \frac{2c_4}{6.7} = \frac{2^2 c_1}{3.4.6.7}$

n = 6, $\quad c_8 = \frac{2c_5}{7.8} = 0$, etc.

como $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots$

$$y = c_0 + c_1 x + \frac{2c_0}{2.3}x^3 + \frac{2c_1}{3.4}x^4 + \frac{2^2 c_1}{3.4.6.7}x^7 + \ldots$$

$$y = c_0 + \frac{2c_0}{2.3}x^3 + \frac{2^2 c_0}{2.3.5.6}x^6 + \frac{2^3 c_0}{2.3.5.6.8.9}x^9 + \ldots + c_1 x + \frac{2c_1}{3.4}x^4 + \frac{2^2 c_1}{3.4.6.7}x^7 + \frac{2^3 c_1}{3.4.6.7.9.10}x^{10} + \ldots$$

$$y = c_0\left(1 + \frac{2}{2.3}x^3 + \frac{2^2}{2.3.5.6}x^6 + \frac{2^3}{2.3.5.6.8.9}x^9 + \ldots\right)$$

$$+c_1\left(x+\frac{2x^4}{3.4}+\frac{2^2}{3.4.6.7}x^7+\frac{2^3}{3.4.6.7.9.10}x^{10}+\ldots\right)$$

Ejemplo.- Resolver la ecuación de segundo orden $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$

Solución

de acuerdo a la nota el punto ordinario se torna x = 0 entonces la solución en serie de potencia es $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$ ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$, ahora ponemos las x en una misma potencia $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2}+c_n\right]x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n=0$$

igualando los inicios de las series se tiene:

$$2c_2+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2}+c_n\right]x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n=0$$

efectuando la suma algebraica de la serie

$$2c_2+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2}+(n+1)c_n\right]x^n=0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando términos a término se tiene.

$2c_2+c_0=0$ $\qquad c_2=-\frac{c_0}{2}$

$(n+1)(n+2)c_{n+2}+(n+1)c_n=0 \Rightarrow \qquad c_{n+2}=-\frac{c_n}{n+2}$

para:

n = 1, $\quad c_3=-\frac{c_1}{3}$

n = 2, $\quad c_4=-\frac{c_2}{4}=\frac{c_0}{2.4}$

n = 3, $\quad c_5=-\frac{c_3}{5}=\frac{c_1}{3.5}$

n = 4, $\quad c_6=-\frac{c_4}{6}=-\frac{c_0}{2.4.6}$

n = 5, $\quad c_7=-\frac{c_5}{7}=-\frac{c_1}{3.5.7}$

Generalizando se tiene:

$$c_{2n}=\frac{(-1)^nc_0}{2.4.6.\ldots(2n)} \quad \text{y} \quad c_{2n+1}=\frac{(1)^nc_1}{1.3.5.\ldots.(2n+1)}$$

como $\quad y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_{2n}x^{2n}+c_{2n+1}x^{2n+1}+\ldots$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{c_0x^{2n}}{2.4.6\ldots(2n)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nc_1x^{2n+1}}{1.3.5\ldots(2n+1)}$$

Ejemplo.- Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=1+y^2$, mediante series de potencia de x, sabiendo que y (0) = 0

Solución

Tomamos a $x_0=0$ como punto ordinario, por lo tanto la solución es $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, ahora determinaremos los coeficientes c_n, obteniéndose mediante la derivada $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ entonces $\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}$, reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = 1+\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n xn\right)^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n . \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right) x^n = 1$$

ahora ponemos las x en una misma potencia.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k . c_{n-k}\right) x^n = 1$$

efectuando la suma algebraica de la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)c_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} c_k . c_{n-k}\right) x^n = 1$$

como se tiene un término independiente en el segundo miembro entonces desarrollamos para n = 0 en la serie.

$$c_1 - \sum_{k=0}^{0} c_k . c_{-k} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)c_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} c_k . c_{n-k}\right] x^n = 1$$

aplicamos el método de los coeficientes indeterminados e igualando términos a término se tiene.

$$c_1 - c_0^2 = 1 \quad y \quad (n+1)c_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} c_k . c_{n-k} = 0$$

Luego:

$$\begin{cases} c_1 = 1 + c_0^2 \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k . c_{n-k} \qquad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

aplicando la condición inicial y(0) = 0 se tiene.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

$y(0) = c_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0$ de donde $c_1 = 1$.

para:

$$n = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} c_k . c_{1-k} = \frac{1}{2}[c_0.c_1 + c_1.c_0] = 0$$

$$n = 2, \quad c_3 = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} c_k . c_{2-k} = \frac{1}{3}[c_0.c_1 + c_1.c_1 + c_2.c_0] = \frac{1}{3}$$

$$n = 3, \quad c_4 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} c_k . c_{3-k} = \frac{1}{4}[c_0.c_2 + c_1.c_2 + c_2.c_1 + c_3.c_0] = 0$$

$$n = 4, \quad c_5 = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} c_k . c_{4-k} = \frac{1}{5}[c_0.c_4 + c_1.c_3 + c_2.c_2 + c_3.c_1 + c_4.c_0] = \frac{2}{15}$$

$$n = 5, \quad c_6 = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} c_k . c_{5-k} = 0$$

$$n = 6, \quad c_7 = \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6} c_k . c_{6-k} = \frac{17}{315}$$

Luego la solución queda en la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

$$y = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots$$

$\therefore \quad y = \text{tg } x.$

Ejemplo.- Hallar la solución general de la ecuación diferencial.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

Solución

Tomemos a $x_0 = 0$ como punto ordinario, por lo tanto la solución en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$ es: $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

de donde $\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

poniendo las x en una misma potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3c_n x^n = 0$$

ahora poniendo los inicios iguales se tiene:

$$2c_2 - 3c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3c_n x^n = 0$$

efectuando la suma algebraica de la serie.

$$2c_2 - 3c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n+3)c_n\right]x^n = 0$$

efectuando el método de los coeficientes indeterminados e igualando término a término.

$$2c_2 - 3c_0 = 0 \text{ y } (n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n+3)c_n = 0$$

$$c_2 = \frac{3c_0}{2} \text{ y } c_{n+2} = \frac{(2n+3)c_n}{(n+2)(n+1)}, \ \forall\, n \geq 1$$

para n = 1, $c_3 = \frac{5c_1}{2.3}$

n = 2, $c_4 = \frac{7c_2}{3.4} = \frac{3.7}{2.3.4.5}c_0$

n = 3, $c_5 = \frac{9c_3}{4.5} = \frac{5.9}{2.3.4.5}c_1$

n = 4, $c_6 = \frac{11}{5.6}c_4 = \frac{3.7.11}{2.3.4.5.6}c_0$

reemplazando en la solución se tiene.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \ldots$$

$$y = c_0 + c_1 x + \frac{3}{2}c_0 x^2 + \frac{5c_1}{2.3}x^3 + \frac{3.7}{2.3.4.5}x^4 + \frac{5.9.c_1}{2.3.4.5}x^5 + \frac{3.7.11c_0}{2.3.4.5.6}x^6 + \ldots$$

$$y = c_0\left(1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3.7}{2.3.4.5}x^4 + \frac{3.7.11}{2.3.4.5.6}x^6 + \ldots\right)$$

$$c_1\left(x + \frac{5}{2.3}x^3 + \frac{5.9}{2.3.4.5}x^5 + \ldots\right)$$

$$y = c_0\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.7\ldots(4n-1)}{(2n)!}x^{2n}\right] + c_1\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.5.9\ldots(4n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Ejemplo.- Resolver la ecuación diferencial.

$(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0$, mediante series de potencias de x.

Solución

Tomando como punto ordinario a $x_0 = 0$ entonces la solución es:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \text{ entonces } \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2},$$

ahora reemplazamos a la ecuación diferencial dada,

$$(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

poniendo las x en una misma potencia.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

ahora poniendo los inicios iguales se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2}-c_n\right]x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+2c_2-c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2}-c_n+nc_n\right]x^n=0$$

$$2c_2-c_0+6.c_3x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)c_n+(n+1)(n+2)c_{n+2}-c_n+nc_n\right]x^n=0$$

$$2c_2-c_0+6.c_3x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n-1)(n+2)c_{n+2}+(n+1)(n-1)c_n\right]x^n=0$$

aplicando el método de los coeficietnes indeterminados e igualando término a término se tiene:

$$\begin{cases}2c_2-c_0=0\\ 6c_3=0\\ (n+1)(n+2)c_{n+2}+(n+1)(n-1)c_n=0\end{cases}\Rightarrow\quad c_2=\frac{c_0}{2},\quad c_3=0,\quad c_{n+2}=-\frac{n-1}{n+2}c_n,\ \forall n\geq 2$$

para $n=2$, $c_4=-\frac{1}{4}c_2=-\frac{c_0}{2.4}=-\frac{c_0}{2^2\,2!}$

$n=3$, $c_5=-\frac{2}{5}c_3=0$

$n=4$, $c_6=-\frac{3c_4}{6}=\frac{1.3c_0}{2^3.3!}$

$n=5$, $c_7=-\frac{4c_5}{7}=0$

$n=6$, $c_8=-\frac{5c_6}{8}=-\frac{1.3.5.c_0}{2^4.4!}$

$n=7$, $c_9=-\frac{6c_7}{9}=0$

$n=8$, $c_{10}=-\frac{7c_8}{10}=\frac{1.3.5.7.c_0}{2^5.5!}$, etc.

como $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+...+c_nx^n+...$

$$y=c_1x+c_0\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2^2 2!}x^4+\frac{1.3}{2^3 3!}x^6-\frac{1.3.5}{2^4 4!}x^8+\frac{1.3.5.7}{2^5 5!}x^{10}+...\right)$$

$$y_1(x)=c_0\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2^2 2!}x^4+\frac{1.3}{2^3 3!}x^6-\frac{1.3.5}{2^4 4!}x^8+\frac{1.3.5.7}{2^5 5!}x^{10}+...\right)$$

$$y_1(x)=c_0\left(1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3.5...(2n-3)}{2^n n!}x^{2n}\right),\ |x|<1$$

$$y_2(x)=c_1x$$

$\therefore\quad y=k_1y_1(x)+k_2y_2(x)\quad$ la solución general.

Ejemplo.- Determinar el valor de r para que la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+ry=0$, tenga soluciones en series de potencias de x de la forma

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

Solución

tomando a $x_0 = 0$ como punto ordinario entonces la solución es $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$, entonces $\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$, ahora reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + r\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} rc_n x^n = 0$$

poniendo las x en una misma potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} rc_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)c_{n+2} + rc_n\right]x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n x^n = 0$$

ahora poniendo los inicios iguales se tiene.

$$2c_2 + rc_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)c_{n+2} + rc_n\right]x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n = 0$$

efectuando la suma algebraica de las series.

$$2c_2 + rc_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)c_{n+2} + (r-2n)c_n\right]x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando término a término se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 2c_2 + rc_0 = 0 \\ (n+1)(n+2)c_{n+2} + (r-2n)c_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_2 = -\frac{r}{2}c_0 \\ c_{n+2} = -\frac{r-2n}{(n+1)(n+2)}c_n \quad \forall n \geq 1 \end{array}\right.$$

para $n = 1$, $\quad c_3 = -\frac{r-2}{2.3}c_1$

$n = 2$, $\quad c_4 = -\frac{r-4}{3.4}c_2 = \frac{r(r-4)}{2.3.4}c_0$

$n = 3$, $\quad c_5 = -\frac{r-6}{4.5}c_3 = \frac{(r-2)(r-6)}{2.3.4.5}c_1$

$n = 4$, $\quad c_6 = -\frac{r-8}{5.6}c_4 = -\frac{r(r-4)(r-8)}{2.3.4.5.6}c_0$

$n = 5$, $\quad c_7 = -\frac{r-19}{6.7}c_5 = -\frac{(r-2)(r-6)(r-10)}{2.3.4.5.6.7}c_1$, etc.

como $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + ... + c_nx^n + ...$

$$y = c_0 + c_1x - \frac{r}{2!}x^2c_0 - \frac{r-2}{3!}c_1x^3 + \frac{r(r-4)}{4!}c_0x^4 + \frac{(r-2)(r-6)}{5!}c_1x^5 - \frac{r(r-4)(r-8)}{6!}c_0x^6 - \frac{r(r-2)(r-6)(r-10)}{7!}c_1x^7 + ...$$

$$y = c_0\left(1 - \frac{r}{2!}x^2 + \frac{r(r-4)}{4!}x^4 - \frac{r(r-4)(r-8)}{6!}x^6 + ...\right)$$

$$c_1\left(x - \frac{r-2}{3!}x^3 + \frac{(r-2)(r-6)}{5!}x^5 - \frac{r(r-2)(r-6)(r-10)}{7!}x^7 + ...\right)$$

$$y = c_0\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{r(r-4)(r-8)...(r-4n)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right)$$

$$+c_1\left(x + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{r(r-2)(r-6)(r-10)...(r-(4n+2))}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)$$

Los valores de r son para todo $r \neq 0,\ 2n$, donde $n \in z^+$

Ejemplo.- Resolver la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - (x+1)y = 0$ mediante series de potencia de x.

Solución

Sea $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ la solución en serie de potencia de x derivando se tiene

$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$ ahora reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}-(x+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

poniendo las x en una misma potencia.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)(n+2)c_{n+2}-c_n\right)x^n-\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n = 0$$

$$2c_2-c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2}-c_n-c_{n-1}\right]x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminado e igualando término a término se tiene:

$$\begin{cases} 2c_2-c_0=0 \\ (n+1)(n+2)c_{n+2}-c_n-c_{n-1}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2=\dfrac{c_0}{2} \\ c_{n+2}=\dfrac{c_n+c_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad \forall n\ge 1 \end{cases}$$

para simplificar en estos casos, primero podemos elegir $c_0 \neq 0,\ c_1 = 0$, y esto nos dará una solución; la otra solución proviene de elegir $c_0 = 0,\ c_1 \neq 0$.

Para el primer caso se tiene:

para $n = 1$, $\quad c_3=\dfrac{c_1+c_0}{2.3}=\dfrac{c_0}{2.3}$

$n = 2$, $\quad c_4=\dfrac{c_2+c_1}{3.4}=\dfrac{c_2}{3.4}\cdot\dfrac{c_0}{2.3.4}=\dfrac{c_0}{24}$

$n = 3$, $\quad c_5=\dfrac{c_3+c_2}{4.5}=\left(\dfrac{c_0}{2.3}+\dfrac{c_0}{2}\right)\dfrac{1}{4.5}=\dfrac{c_0}{30}$, etc.

luego una solución en series es:

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+...+c_nx^n+...$$

$$y_1=c_0+\frac{c_0}{2}x^2+\frac{c_0}{6}x^3+\frac{c_0}{24}x^4+\frac{c_0}{30}x^5+...$$

$$y_1(x)=c_0\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{30}+...\right)$$

la otra solución es para $c_0 = 0,\ c_1 \neq 0$.

$n = 1$, $\quad c_3=\dfrac{c_0}{2.3}=\dfrac{c_0}{6}$

$n = 2$, $\quad c_4=\dfrac{c_2+c_1}{3.4}=\dfrac{c_1}{3.4}=\dfrac{c_1}{12}$

$n = 3$, $\quad c_5=\dfrac{c_3+c_2}{4.5}=\dfrac{c_1}{2.3.4.5}=\dfrac{c_1}{120}$, etc.

Luego la solución en serie es:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+...+c_nx^n+...$$

$$y_2(x)=c_1x+\frac{c_1}{6}x^3+\frac{c_1}{12}x^4+\frac{c_1}{120}x^5+...$$

$$y_2(x)=c_1\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{120}+...\right)$$

La solución general de la ecuación diferencial es.

$$y = c_0\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{30}+\dots\right)+c_1\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\dots\right)$$

Ejemplo.- Resolver la ecuación diferencial $(x^2+x)\frac{d^2y}{dx^2}+(x-2)y=0$, mediante series de potencias de x - 1.

<u>Solución</u>

Los puntos ordinarios son $\forall\ x \neq 0, x \neq -1$, en particular es punto ordinario $x_0 = 1$, entonces la ecuación diferencial admite una solución en serie de potencia $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n$ de donde sus derivadas son $\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-1)^{n-1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-1)^{n-2}$, para que el procedimiento sea más sencillo haremos el siguiente cambio de variable.

u = x - 1 $\Rightarrow$ x = u + 1 de donde $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{du}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy'}{du}=\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{du}\right)=\frac{d^2y}{du^2}$$

como:

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-1)^{n-1}\\ \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-1)^{n-2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{dy}{du}=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n u^{n-1}\\ \frac{d^2y}{du^2}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-2}\end{cases}$$

al reemplazar en la ecuación diferencial $x(x+1)\frac{d^2y}{dx^2}+(x-2)y=0$

$(u+1)(u+2)\frac{d^2y}{du^2}+(u-1)y=0$, de donde

$$(u+1)(u+2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-2}+(u-1)\sum_{n=0}^{\infty} nc_n u^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^n+3\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-1}+$$

$$2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-2}+(u-1)\sum_{n=0}^{\infty} nc_n u^n=0$$

poniendo en una misma potencia a u.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^n+\sum_{n=1}^{\infty} 3n(n+1)c_{n+1}u^n+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(n+2)c_{n+2}u^n+\sum_{n=0}^{\infty} c_n u^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^n+\sum_{n=1}^{\infty} 3n(n+1)c_{n+1}u^n+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2(n+1)(n+2)c_{n+2}-c_n)u^n+\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}u^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^n+\sum_{n=1}^{\infty} (3n(n+1)c_{n+1}-c_{n-1})u^n+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2(n+1)(n+2)c_{n+2}-c_n)u^n=0$$

ahora poniendo los inicios iguales se tiene.

$$4c_2-c_0+(12c_3+6c_2-c_1+c_0)u+\sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1)-1)c_n+c_{n-1}+$$

$$3n(n+1)c_{n+1}+2(n+1)(n+1)c_{n+2})u^n=0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando término a término se tiene:

$$\begin{cases} 4c_2 - c_0 \\ 12c_3 + 6c_2 - c_1 + c_0 = 0 \\ 3n(n+1)c_{n+1} + 2(n+1)(n+2)c_{n+2} + (n(n-1)-1)c_n + c_{n-1} = 0 \end{cases}$$

de donde $c_2 = \dfrac{c_0}{4}$ y $c_3 = \dfrac{1}{12}\left(c_1 - \dfrac{5}{2}c_0\right)$

$$c_{n+2} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\left(-c_{n-1} - (n^2-n-1)c_n - 3n(n+1)c_{n+1}\right) \forall\ n \geq 2$$

para $\quad n = 2, \qquad c_4 = \dfrac{1}{2.3.4}\left(\dfrac{7}{2}c_0 - \dfrac{5}{2}c_1\right)$

$\qquad n = 3, \qquad c_5 = \dfrac{1}{2.4.5}\left(-\dfrac{107}{24}c_0 - \dfrac{10}{3}c_1\right)$

$\qquad n = 4, \qquad c_6 = \dfrac{1}{2.5.6}\left(-\dfrac{263}{24}c_0 - \dfrac{421}{48}c_1\right)$

como la solución en serie será.

$$y(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + c_4 u^4 + \ldots$$

ahora reemplazando los valores de c_n.

$$y(u) = c_0 + c_1 u + \frac{c_0}{4}u^2 + \frac{1}{12}\left(c_1 - \frac{5}{2}c_0\right)u^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{7}{2}c_0 - \frac{5}{2}c_1\right)u^4 +$$

$$+ \frac{1}{40}\left(-\frac{107}{24}c_0 + \frac{10}{3}c_1\right)u^5 + \frac{1}{60}\left(-\frac{263}{24}c_0 - \frac{421}{48}c_1\right)u^6 + \ldots$$

$$y(u) = c_0\left(1 + \frac{u^2}{4} - \frac{5}{24}u^3 + \frac{7}{48}u^4 - \frac{107}{960}u^5 + \ldots\right)$$

$$+ c_1\left(u + \frac{u^3}{12} - \frac{5}{48}u^4 + \frac{u^5}{12} + \ldots\right)$$

como u = x - 1 entonces al sustituir se tiene:

$$y(x) = c_0\left[1 + \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{5}{24}(x-1)^3 + \frac{7}{48}(x-1)^4 - \frac{107}{960}(x-1)^5 + \ldots\right]$$

$$+ c_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{12} - \frac{5}{48}(x-1)^4 + \frac{(x-1)^5}{12} + \ldots\right]$$

Ejemplo.- Hallar la solución de la ecuación diferencial $(1-x)\dfrac{dy}{dx} + y = 1 + x$, que satisface la condición inicial y (0) = 0.

Solución

aplicando la serie de Taylor $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ solución en serie ahora derivamos $\dfrac{dy}{dx} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$, reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene.

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + x$$

poniendo las x en una misma potencia.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)c_{n+1} + c_n]x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n = 1 + x$$

ahora poniendo los inicios iguales.

$$c_1+c_0+(2c_2+c_1-c_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)c_{n+1}+c_n-nc_n\right]x^n=1+x$$

$$\begin{cases} c_1+c_0=1 & c_1=1-c_0 \\ 2c_2=1 & \Rightarrow c_2=1/2 \\ (n+1)c_{n+1}+c_n-nc_n=0, \quad \forall\ n\geq 2 & c_{n+1}=\dfrac{n-1}{n+1}c_n \end{cases}$$

para $\quad n=2, \qquad c_3=\dfrac{c_2}{3}=\dfrac{1}{2.3}$

$n=3, \qquad c_4=\dfrac{2}{4}c_3=\dfrac{1}{3.4}$

$n=4, \qquad c_5=\dfrac{3}{5}c_4=\dfrac{1}{4.5}$

aplicando la condición inicial $y(0)=0$ se tiene: $c_0=0$, $c_1=1$, de donde, por lo tanto, si la solución en serie de potencia es

$y(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+...+c_nu^n+...$ es decir

$$\therefore \qquad y(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2.3}x^3+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^5}{4.5}+...$$

$$y(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

Ejemplo.- Halla la solución en serie de potencia de la ecuación diferencial $(x^2-1)\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+xy=0$ que satisface las condiciones iniciales $y(0)=4$, $y'(0)=6$

Solución

Tomando a $x_0=0$ como punto ordinario, entonces la solución en serie de potencia es $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, derivando se tiene $\dfrac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$

ahora reemplazamos en la ecuación dada.

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}3nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}=0$$

poniendo las x en una misma potencia.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n+x\sum_{n=1}^{\infty}3nc_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n=0$$

poniendo los inicios iguales se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n-2c_2-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}(3nc_n+c_{n-1})x^n=0$$

$$-2c_2+(3c_1+c_0-6c_3)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n^2+2n)c_n+c_{n-1}-(n+1)(n+2)c_{n+2}\right]x^n=0$$

aplicando término a término se tiene:

$$\begin{cases} -2c_2=0 & c_2=0 \\ 3c_1+c_0-6c_3=0 & \Rightarrow c_3=\dfrac{1}{6}(c_0+3c_1) \end{cases}$$

$(n^2+2n)c_n+c_{n-1}-(n+1)(n+2)c_{n+2}=0$ para $\forall\ n\geq 2$

de donde $c_{n+2}=\dfrac{c_{n-1}+n(n+2)c_n}{(n+1)(n+2)}$ $\quad \forall\ n\geq 2$

para $\quad n=2, \qquad c_4=\dfrac{c_1+8c_2}{3.4}=\dfrac{c_1}{3.4}$

$$n=3,\qquad c_5=\frac{c_2+15c_3}{4.5}=\frac{3}{4}c_3=\frac{1}{2.4}(c_0+3c_1)$$

$$n=4,\qquad c_6=\frac{c_3+24c_4}{5.6}=\frac{c_0+15c_1}{5.6^2}$$

de las condiciones iniciales se tiene $y(0)=c_0=4$

$y'(0)=c_1=6$ entonces se tiene: $c_0=6,\ c_1=6,\ c_2=0$

$$c_3=\frac{11}{3},\quad c_4=\frac{1}{2},\qquad c_5=\frac{11}{4},\quad c_6=\frac{47}{90}$$

como la solución es:

$$y(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5...$$

$$y(x)=4+6x+\frac{11}{3}x^3+\frac{x^4}{2}+\frac{11}{4}x^5+\frac{47}{90}x^6+...$$

Observación.- El método de solución de las ecuaciones diferenciales por medio de series de potencia, se puede aplicar cuando los coeficientes no son polinomios.

Ejemplo.- Hallar la solución de la ecuación diferencial por medio de series de potencia. $y''+(\cos x)\,y=0$

Solución

Se conoce que $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...$

como $x_0=0$ es un punto ordinario entonces la solución en serie de potencia es

$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, de donde sus derivados son:

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}\quad y\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada

$$y''+(\cos x)y=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...\right)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

$$=(2c_2+6c_3x+12c_4x^2+20c_5x^3+...)+$$

$$\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...\right)(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+...)$$

$$=(c_0+2c_2)+(c_1+6c_3)x+\left(-\frac{c_0}{2}+c_2+12c_4\right)x^2$$

$$+\left(20c_5+c_3-\frac{c_1}{2}\right)x^3+...=0$$

por el método de los coeficientes indeterminados

$$\begin{cases} c_0+2c_2=0 \\ c_1+6c_3=0 \\ -\frac{c_0}{2}+c_2+12c_4=0 \\ -\frac{c_1}{2}+c_3+20c_5=0 \end{cases}\Rightarrow\quad \begin{matrix} c_2=-\frac{c_0}{2} \\ c_3=-\frac{c_1}{6} \\ c_4=\frac{c_0}{12} \\ c_5=\frac{c_1}{30} \end{matrix}$$

como $y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5...$

$$y=\left(c_0-\frac{c_0}{2}x^2+\frac{c_0}{12}x^4+...\right)+\left(c_1x-\frac{c_1}{6}x^3+\frac{c_1}{30}x^5+...\right)$$

$$y=c_0\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+...\right)+c_1\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{30}+...\right)$$

Ejemplo.- Hallar la solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\operatorname{sen}x$ en serie de potencias que satisface las condiciones iniciales y(0) = y'(0) = 0.

Solución

como $x_0 = 0$ es un punto ordinario, entonces suponemos que $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ es la solución de la ecuación diferencial dada, de donde sus derivados son $\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$, además se conoce $\operatorname{sen}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, ahora reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

a las series del primer miembro ponemos en la misma potencia.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2}+c_n\right]x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

La serie del primer miembro lo expresaremos como la suma de una serie de potencias impares de x en una serie de potencias pares de x, puesto que la serie de potencias del segundo miembro contiene solo potencias impares de x.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2n+2)(2n+3)c_{2n+3}+c_{2n+1}\right]x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2n+1)(2n+2)c_{2n+2}+c_{2n}\right]x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

por el método de los coeficientes indeterminados se tiene:

$$\begin{cases} c_{2n+3}=\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}\left[\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}-c_{2n+1}\right] & \forall\ n\geq 0 \\ c_{2n}=\dfrac{c_{2n}}{(2n+1)(2n+2)} \end{cases}$$

fórmula de recurrencia.

para n = 0, $c_3=\frac{1}{2.3}[1-c_1]$, $c_2=-\frac{c_0}{1.2}$

n = 1, $c_5=\frac{1}{4.5}\left[-\frac{2}{3!}+\frac{c_1}{3!}\right]$, $c_4=\frac{(-1)^2c_0}{1.2.3.4}$

n = 2, $c_7=\frac{1}{6.7}\left[\frac{3}{5!}-\frac{c_1}{5!}\right]$, $c_6=\frac{(-1)^3c_0}{1.2.3.4.5.6}$

como la solución $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$

$$y(x)=c_0+c_1x+\frac{(-1)}{2!}c_0x^2+\frac{1}{3!}[1-c_1]x^3+\frac{(-1)^2}{4!}c_0x^4$$

$$+\frac{1}{4.5}\left[-\frac{2}{3!}+\frac{c_1}{3!}\right]x^5+\frac{(-1)^3}{6!}c_0x^6+\frac{1}{6.7}\left[\frac{3}{5!}-\frac{c_1}{5!}\right]x^7+\ldots$$

$$y(x)=c_0\left(1+\frac{(-1)^1}{2!}x^2+\frac{(-1)^2}{4!}x^4+\frac{(-1)^3}{6!}x^6+\ldots\right)$$

$$+c_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)$$

$$+\left[\frac{x^3}{3!}-\frac{2x^5}{5!}+\frac{3x^7}{7!}+\ldots\right]$$

$$y(x)=c_0\cos x+c_1\operatorname{sen}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad\forall\ x\in\mathbb{R}$$

como $y(0) = y'(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$ y $c_1 = 0$

$$\therefore \quad y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Ejemplo: Hallar la solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 2y = e^x$ en serie de potencia que satisface las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$.

Solución

como $x_0 = 0$ es un punto ordinario, entonces suponemos que $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es la solución de la ecuación diferencial dada, de donde sus derivadas son:

$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$ además se tiene: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, luego al reemplazar en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ahora ponemos en potencias de x iguales.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} - 2c_n] x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

poniendo los inicios iguales se tiene.

$$2c_2 - 2c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} - 2c_n + nc_n] x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} 2c_2 - 2c_0 = 1 \\ (n+1)(n+2)c_{n+2} - 2c_n + nc_n = \frac{1}{n!}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

$$c_2 = \frac{1}{2} + c_0$$

$$c_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\frac{1}{n!} + (2-n)c_n\right], \quad \forall n \geq 1$$

aplicando las condiciones iniciales en la solución

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

$y(0) = y'(0) = 0 = c_0 = c_1$ entonces $c_2 = \frac{1}{2}$

para $n = 1$, $c_3 = \frac{1}{2.3}[1 + c_1] = \frac{1}{2.3} = \frac{1}{3!}$

$n = 2$, $c_4 = \frac{1}{3.4}\left[\frac{1}{2} + 0\right] = \frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{4!}$

$n = 3$, $c_5 = \frac{1}{4.5}\left[\frac{1}{6} - c_3\right] = \frac{1}{4.5}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right] = 0$

$n = 4$, $c_6 = \frac{1}{5.6}\left[\frac{1}{24} - 2c_4\right] = -\frac{1}{6!}$

$n = 5$, $c_7 = \frac{1}{6.7}\left[\frac{1}{120} - 5c_5\right] = \frac{1}{7!}$

como la solución es $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \ldots$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

9.1.1 Solución Entorno a Puntos Singulares

Se ha estudiado la solución en series de potencias de la ecuación diferencial $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ en torno a un punto ordinario $x = x_0$ sin mayores dificultades, sin embargo cuando $x = x_0$ es un punto singular no siempre es posible encontrar una solución de la forma $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$; entonces nuestro problema será de encontrar una solución en series de potencias de la forma $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}$, donde r es una constante que se debe determinar.

9.1.2 Puntos Singulares Regulares e Irregulares

Un punto singular $x = x_0$ de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$ se denomina punto singular regular si $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2\ Q(x)$ son ambas analíticas en x_0, en otros términos $(x - x_0)\ P(x)$ y $(x - x_0)^2\ Q(x)$ tienen una serie de potencia en $(x - x_0)$ con radio de convergencia $R > 0$.

Un punto singular que no es regular se denomina punto irregular de la ecuación.

Observación: Cuando en la ecuación diferencial $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ los coeficientes son polinomios sin factores comunes, la definición anterior es equivalente a:

Sea $a_2(x_0) = 0$, obtenga P(x) y Q(x) simplificando $\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ y $\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ respectivamente hasta que estas sean fracciones racional irreducible. Si el factor $x - x_0$ es a lo más de primer grado en el denominador de P(x) y a lo más de segundo grado en el denominador de Q(x) entonces $x = x_0$ es un punto singular regular.

Ejemplo:

En la ecuación diferencial $(x^2-1)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(x-1)\frac{dy}{dx}+y=0$, los puntos singulares son $x = -1$, $x = 1$, al dividir a la ecuación diferencial entre $(x^2 - 1)^2 = (x + 1)^2(x - 1)^2$ se obtiene $P(x)=\frac{1}{(x-1)(x+1)^2}$ y $Q(x)=\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}$ analizando a P(x) y Q(x) en cada punto singular para que $x = -1$ sea un punto singular regular, el factor $x + 1$ puede aparecer a lo sumo elevado a la primera potencia en el denominador de P(x) y a lo sumo elevado a la segunda potencia en el denominador de Q(x) observamos que P(x) y Q(x) no cumple la primera condición por lo tanto concluimos que $x = -1$ es un punto singular irregular, para que $x = 1$ sea un punto singular regular, el factor $x - 1$ puede aparecer a lo sumo elevado a la primera potencia en el denominador de P(x) y a lo más elevado a la segunda potencia en el denominador de Q(x) por lo tanto analizando P(x) y Q(x) ambas verifican la condición. Luego $x = 1$ es un punto singular regular.

Ejemplo: A la ecuación diferencial $x^2(x+1)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(x^2-1)\frac{dy}{dx}+2y=0$ dividimos entre $x^2(x + 1)^2$, es decir:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{x-1}{x^2(x+1)}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x^2(x+1)^2}y=0$$

Luego $x = 0$ es un punto singular irregular, puesto que $(x - 0)$ aparece elevado a la segunda potencia en el denominador de P(x) pero $x = -1$ si es un punto singular regular.

Ejemplo: A la ecuación diferencial $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+30y=0$ dividimos entre $1 - x^2$, es decir:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2x}{(1-x)(1+x)}\frac{dy}{dx}+\frac{30}{(1-x)(1+x)}y=0$$

Los puntos $x = 1$, $x = -1$ son puntos singulares regulares.

Ejemplo: En la ecuación diferencial $x^3\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+5y=0$, $x = 0$ es un punto singular irregular puesto que $Q(x)=\frac{5}{x^3}$.

9.2. Método de Frobenius

La solución de las ecuaciones diferenciales $a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ en serie de potencia entorno a un punto singular regular, se obtiene mediante el siguiente teorema debido a "Ferdinand George Frobenius".

Teorema: Si $x = x_0$ es un punto singular regular la ecuación diferencial $a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ existe al menos una solución en series de potencias de la forma $y=(x-x_0)^r\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}$ donde el número r es una constante a determinar.

La serie convergerá al menos en algún intervalo $0 < |x - x_0| < R$.

Ecuación Indicial:

A la ecuación diferencial $a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ escribiremos en la forma $\dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)y=0$ .... (1)

Si $x = x_0$ es un punto singular de la ecuación diferencial (1), entonces quiere decir que $x\,p(x)$ y $x^2\,Q(x)$ son analíticas en $x_0 = 0$ y en consecuencia admite desarrollo en series de potencias, a la ecuación cuadrática en r dado por $r(r-1)+P_0\,r+q_0=0$ se denomina "Ecuación Indicial" de la ecuación diferencial (1) donde $P_0=\lim\limits_{x\to 0}xP(x)$ y $q_0=\lim\limits_{x\to 0}x^2Q(x)$ a los valores r_1 y r_2 de la ecuación indicial se le llama raíces indiciales ó exponentes de la singularidad.

Teorema: Demostrar que la ecuación indicial de la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)y=0$ alrededor del punto singular regular $x_0 = 0$ es $r(r-1)+p_0\,r+q_0=0$.

<u>**Demostración**</u>

como $x_0 = 0$ es un punto singular regular entonces por el teorema de Frobenius existe una solución en serie de potencias de la forma $y=x^r\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ ahora calculamos las derivadas

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}.$$

por otra parte, como $x_0 = 0$ es un punto singular regular, entonces $x\,p(x)$ y $x^2\,Q(x)$ son analitica $x_0 = 0$ en consecuencia admiten desarrollo en series de potencias es decir:

$xp(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_nx^n$, $x^2Q(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}q_nx^n$, donde ambas series convergen en un intervalo $|x| < R$, centrado en $x_0 = 0$, ahora reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}+\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n.\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}+$$

$$\frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}+\frac{x^{r-1}}{x}\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n.\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^n$$

$$+\frac{x^r}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n.\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}+x^{r-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(r+k)c_nP_{n-k}\right]x^n$$

$$+x^{r-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}c_kq_{n-k}\right]x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)c_n+\sum_{k=0}^{n}(k+r)c_kP_{n-k}+\sum_{k=0}^{n}c_kq_{n-k}\right]x^{n+r-2}=0$$

por el método de los coeficientes indeterminados se tiene:

$$(n+r)(n+r-1)c_n+\sum_{k=0}^{n}\left[(k+r)P_{n-k}+q_{n-k}\right]c_k=0,\ \forall\ n\ge 0$$

pero n = 0, se tiene; $r(r-1)c_0+(rP_0+q_0)c_0=0$

como $c_0\neq 0$, entonces $r(r-1)+rP_0+q_0=0$.

Que es la ecuación indicial de la ecuación diferencial.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}-y=0$ aplicando el método de Frobenius.

Solución

Sea $x_0 = 0$ un punto singular regular de la ecuación diferencial entonces por Frobenius la solución en series de potencias es $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}$, cuyas derivadas son

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}\quad \text{y}\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada.

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)c_n x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)c_n+3(n+r)c_n]x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n\right]=0$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)((n+r-1)+3)c_n]x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n-1}\right]=0$$

$$x^r\left[\frac{r(r+2)c_0}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r+2)c_n-c_{n-1}]x^{n-1}\right]=0$$

$$\begin{cases} r(r+2)c_0=0 \\ (n+r)(n+r+2)c_n-c_{n-1}=0 \end{cases}\quad \forall\ n\ge 1\ \text{..........}(\alpha)$$

Luego $r(r+2)=0 \Rightarrow r_1=0,\ r_2=-2$.

para $r_1 = 0$, $\quad c_n=\dfrac{c_{n-1}}{n(n+2)}\quad \forall\ n\ge 1$

para n = 1, $\quad c_1=\dfrac{c_0}{1.3}$

n = 2, $\quad c_2=\dfrac{c_1}{2.4}=\dfrac{c_0}{1.2.3.4}=\dfrac{2c_0}{2!4!}$

n = 3, $\quad c_3=\dfrac{c_2}{3.5}=\dfrac{2c_0}{3!5!}$

n = 4, $\quad c_4=\dfrac{c_3}{4.6}=\dfrac{2c_0}{4!6!}$

⋮

$$c_n=\frac{2c_0}{n!(n+2)!},\quad \forall\ n=1,2,3,....$$

por lo tanto una solución en serie es:

$$Y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2c_0x^n}{n!(n+2)!}=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^n}{n!(n+2)!},\ \text{para } |x|<\infty$$

cuando $r_2=-2$, la ecuación (α) se transforma en

$$(n-2)n\,c_n-c_{n-1}=0\quad \forall\ n\ge 1$$

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{(n-2)n}$$

para n = 1 y n = 2

$$\begin{cases} -c_1 - c_0 = 0 \\ c_2 - c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

n = 3, $\quad c_3 = \frac{c_2}{1.3}$

n = 4, $\quad c_4 = \frac{c_3}{2.4} = \frac{c_2}{1.2.3.4} = \frac{2c_2}{2!4!}$

n = 5, $\quad c_5 = \frac{c_4}{3.5} = \frac{2c_2}{3!5!}$

n = 6, $\quad c_5 = \frac{c_4}{3.5} = \frac{2c_2}{3!5!}$

$\vdots$

$$c_n = \frac{2c_2}{(n-2)!n!}, \qquad n = 3,4,5...$$

Luego la otra solución es:

$$y = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2c_2}{(n-2)!\,n!} x^{n-2}$$

9.2.1 Casos de Raíces Indiciales:

Para aplicar el método de Frobenius se distinguen tres casos de acuerdo con la naturaleza de las raíces indiciales; para simplificar, supongamos que r_1 y r_2 son las soluciones reales de la ecuación indicial, donde r_1 es mayor que r_2. La solución en

series de potencias de la ecuación diferencial entorno a un punto singular regular lo trataremos en el siguiente teorema.

Teorema.- Sea $x_0 = 0$ un punto singular regular de la ecuación diferencial de segundo orden $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$, supongamos que x p(x) y x^2 Q(x) son analíticas en el intervalo $|x| < R$ y sean r_1 y r_2 las raíces reales de la ecuación indicial $r(r-1) + P_0 r + q_0 = 0$, donde $r_1 > r_2$, entonces la ecuación diferencial dada tiene dos soluciones linealmente independientes $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$, validez para $|x| < R$ donde la primera solución es $Y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}$, donde $c_0 = 1$ y la segunda solución $Y_2(x)$ depende de $r_1 - r_2$ es decir:

a) Si $r_1 - r_2$ no es un entero positivo, entonces:

$$Y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \text{ donde } b_0 = 1.$$

b) Si $r_1 - r_2$ es un entero positivo, entonces:

$$Y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + cY_1(x)\,Ln|x|, \text{ donde } b_0 = 1.$$

c) Si $r_1 = r_2$, entonces la segunda solución es:

$$Y_2(x) = Y_1(x)\,Lnx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad \text{donde } b_0 = 0.$$

Nota: En la parte b) del teorema se tiene si $r_1 - r_2$ es un entero la segunda solución se puede obtener en la forma $Y_2(x) = Y_1(x)\int \frac{e^{\int P(x)dx}}{Y_1^2(x)}dx$ siempre que $Y_1(x)$ sea una solución conocida de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $2x\frac{d^2y}{dx^2} + (x+1)\frac{dy}{dx} + y = 0$, aplicando el método de Frobenius.

Solución

como $x_0 = 0$ es un punto singular regular entonces existe solución en series de potencia de la forma. $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$, donde r es constante por calcularse.

Calculando las derivadas se tiene:

$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$, y $\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$ reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + (x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)c_n x^{n+r} = 0$$

poniendo las x en potencias iguales se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)c_{n-1}x^{n+r-1} = 0$$

poniendo los inicios iguales.

$$r(2r-1)c_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)c_{n-1}x^{n+r-1} = 0$$

$$r(2r-1)x^{r-1} + x^{r-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(2n+2r-1)c_n + (n+r)c_{n-1}]x^n\right) = 0$$

ahora aplicando el método de los coeficientes indeterminados

$$\begin{cases} r(2r-1) = 0 \\ (n+r)(2n+2r-1)c_n + (n+r)c_{n-1} = 0 \end{cases} \quad \text{para } n \geq 1.$$

$r(2r-1) = 0$ entonces $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 0$.

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{2n+2r-1} \text{ la fórmula de recurrencia.}$$

para $r_1 = \frac{1}{2}$ se tiene $c_n = -\frac{c_{n-1}}{2n}$, n = 1,2,3,4...,

para n = 1, $c_1 = -\frac{c_0}{2.1}$

n = 2, $c_2 = -\frac{c_1}{2.2} = \frac{c_0}{2^2 2!}$

n = 3, $c_3 = -\frac{c_2}{2.3} = -\frac{c_0}{2^3.3!}$

n = 4, $c_4 = -\frac{c_3}{2.4} = \frac{c_0}{2^4.4!}$

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{2^n.n!}, \text{ n = 1,2,3...}$$

$$Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = x^{1/2}\left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n\right) = x^{1/2}c_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^n\right)$$

$Y_1(x) = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{n+1/2}$ es la primera solución, para $r_2 = 0$, se tiene la segunda solución.

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{2n-1} \text{ para n = 1,2,3,4...}$$

para $\quad n = 1, \qquad c_1 = \frac{c_0}{1}$

$n = 2, \qquad c_2 = -\frac{c_1}{3} = \frac{c_0}{1.3}$

$n = 3, \qquad c_3 = -\frac{c_2}{5} = -\frac{c_0}{1.3.5}$

$n = 4, \qquad c_4 = -\frac{c_3}{7} = \frac{c_0}{1.3.5.7}$

⋮

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{1.3.5\ldots(2n-1)} \quad \text{para n = 1,2,3,...}$$

$$Y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{puesto que } r = r_2 = 0$$

$$Y_2(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} x^n \quad \text{para } |x| < \infty$$

Luego la solución general es:

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x)$$

Ejemplo: Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = 0$$

Solución

Del ejemplo, el método de Frobenius proporciona solamente una solución de esta ecuación dado por

$$Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!(n+2)!} x^n = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \ldots$$

de la observación se tiene una segunda solución.

$$Y_2(x) = Y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2(x)} dx$$

$$Y_2(x) = Y_1(x)\int \frac{e^{-\int \frac{3}{x}dx}}{Y_1^2(x)} dx = Y_1(x)\int \frac{dx}{x^3\left[1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \ldots\right]^2}$$

$$= Y_1(x)\int \frac{dx}{x^3\left[1 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + \frac{x^3}{30} + \ldots\right]}$$

$$= Y_1(x)\int \frac{1}{x^3}\left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{4} - \frac{19}{270}x^3 + \ldots\right) dx$$

$$= Y_1(x)\int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{3x^2} + \frac{1}{4x} - \frac{19}{270} + \ldots\right) dx$$

$$= Y_1(x)\left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} + \frac{1}{4}\ln x - \frac{19}{270}x + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{4}Y_1(x)\ln x + Y_1(x)\left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} - \frac{19}{270}x + \ldots\right)$$

Luego la solución general en el intervalo $0 < x < \infty$ es

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2\left[\frac{1}{4}Y_1(x)\ln x + Y_1(x)\left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} - \frac{19}{270}x + \ldots\right)\right]$$

Ejemplo: Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

Solución

como $x_0 = 0$ es un punto singular regular, entonces la solución en series es $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$, de donde sus derivadas es $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$,

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}4c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}4c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty}4c_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

$$r^2 c_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r)^2 c_n - 4c_{n-1}\right]x^{n+r-1} = 0$$

$$r^2 c_0 x^{r-1} + x^{r-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r)^2 c_n - 4c_{n-1}\right]x^{n} = 0$$

ahora aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = 0$

$(n+r)^2 c_n - 4c_{n-1} = 0 \Rightarrow c_n = \frac{4c_{n-1}}{(n+r)^2}$

como $r_1 = r_2 = 0$ entonces $c_n = \frac{4c_{n-1}}{n^2}$

para $n = 1$, $c_1 = \frac{4c_0}{1^2}$

$n = 2$, $c_2 = \frac{4c_1}{2^2} = \frac{4^2 c_0}{(1.2)^2} = \frac{4^2 c_0}{(2!)^2}$

$n = 3$, $c_3 = \frac{4c_2}{3^2} = \frac{4^3 c_0}{(3!)^2}$

$\vdots$

$c_n = \frac{4^n c_0}{(n!)^2}$

Luego la solución resulta.

$$Y_1'(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^n}{(n!)^2} \quad \text{para } |x| < \infty$$

para obtener la segunda solución linealmente independiente hacemos $c_0 = 1$

como se conoce $Y_2(x) = Y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2(x)}dx$

$$Y_2(x) = Y_1(x)\int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{Y_1^2(x)}dx = Y_1(x)\int \frac{dx}{x\left[1+4x+4x^2+\frac{16}{9}x^3+\ldots\right]^2}$$

$$= Y_1(x)\int \frac{dx}{x\left[1+4x+24x^2+\frac{16}{9}x^3+\ldots\right]}$$

$$= Y_1(x)\int \frac{1}{x}\left(1-8x+40x^2-\frac{1472}{9}x^3+\ldots\right)dx$$

$$= Y_1(x)\int \left(\frac{1}{x}-8+4x-\frac{1472}{9}x^2+\ldots\right)dx$$

$$= Y_1(x)\left[\ln x - 8x + 2x^2 - \frac{1472}{27}x^3 + \dots\right]$$

$$Y_2(x) = Y_1(x)\ln x + Y_1(x)\left(-8x + 2x^2 - \frac{1472}{27}x^3 + \dots\right)$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es:

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2\left[Y_1(x)\ln x + Y_1(x)\left(-8x + 2x^2 - \frac{1472}{27}x^3 + \dots\right)\right]$$

Ejemplo: Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (1+x)y = 0$ alrededor del primer punto singular regular $x_0 = 0$.

Solución

como $x_0 = 0$ es un punto singular regular, entonces la primera solución diferencial dada es: $Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$, calculando sus derivadas $Y'_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$ y

$Y''_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$,

ahora reemplazando en la ecuación diferencial dado.

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} - x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+r)(n+r-1)c_n - (n+r)c_n + c_n]x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(2n+2r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n+r} = 0$$

$$(r-1)(2r-1)c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)(2n+2r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

$$(r-1)(2r-1)c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+r-1)(2n+2r-1)c_n + c_{n-1}]x^{n+r} = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases}(r-1)(2r-1)c_0 = 0, & c_0 \neq 0\\ (n+r-1)(2n+2r-1)c_n + c_{n-1} = 0\end{cases} \text{ entonces } \begin{cases} r_1 = 1, \quad r_2 = 1/2 \\ c_n = -\dfrac{c_{n-1}}{(n+r-1)(2n+2r-1)}\end{cases}$$

$r_1 = 1$ se tiene $c_n = -\dfrac{c_{n-1}}{n(2n+1)}$ para $n \geq 1$

para $n = 1$, $\quad c_1 = -\dfrac{c_0}{1.3}$

$n = 2$, $\quad c_2 = -\dfrac{c_1}{2.5} = \dfrac{c_0}{1.2.3.5}$

$n = 3$, $\quad c_3 = -\dfrac{c_2}{3.7} = -\dfrac{c_0}{1.2.3^2.5.7}$

$n = 4$, $\quad c_4 = -\dfrac{c_3}{4.9} = \dfrac{c_0}{1.2.3^2.4.5.7.9}$

$n = 5$, $\quad c_5 = -\dfrac{c_4}{5.11} = -\dfrac{c_0}{1.2.3^2.4.5^2.7.9}$

como $Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$

$$Y_1(x) = x\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1.2.3^2.4.5^2.6.7^2.8.9\ \dots}x^n\right)$$

$$Y_1(x) = x\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!(2n+1)}\right) \quad \text{para } c_0 = 1 \neq 0.$$

ahora calculamos la segunda solución.

como $r_1 - r_2 = \frac{1}{2}$ no es un entero entonces de la parte a) del teorema se tiene

$Y_2(x) = x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ donde $b_0 = 1$.

$$b_n = -\frac{b_{n-1}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)2n} = -\frac{b_{n-1}}{n(2n-1)} \quad \forall\, n \geq 1$$

para n = 1, $\quad b_1 = -\frac{b_0}{1}$

n = 2, $\quad b_2 = -\frac{b_1}{2.3} = \frac{b_0}{1.2.3}$

n = 3, $\quad b_3 = -\frac{b_2}{3.5} = -\frac{b_0}{1.2.3^2.5}$

n = 4, $\quad b_4 = -\frac{b_3}{4.7} = \frac{b_0}{1.2.3^2.4.5.7}$

n = 5, $\quad b_5 = -\frac{b_4}{5.9} = -\frac{b_0}{1.2.3^2.4.5^2.7.9}$

$$\vdots$$

$$b_n = \frac{(-1)^n b_0}{1.2.3^2.4.5^2.6.7^2.8...} = \frac{(-1)^n b_0}{n!(2n-1)}$$

$$Y_2(x) = x^{1/2}\left[b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n b_0}{n!(2n-1)}\right] \text{ para } b_0 = 1 \neq 0$$

$$Y_2(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!(2n-1)}\right]$$

Luego la solución general es dado por.

$$Y(x) = c_1\, Y_1(x) + c_2\, Y_2(x)$$

Ejemplo: Aplicando Frobenius, hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Solución

como $x_0 = 0$ es un punto singular regular, entonces la primera solución es: $Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$, calculando las derivadas $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$ reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

poniendo las x en igual potencias se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n+r-1} = 0$$

poniendo los inicios iguales.

$$r^2c_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)^2 c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n+r-1} = 0$$

$$r^2c_0x^{r-1} + x^{r-1}\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)^2 c_n + c_{n-1}]x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} r^2c_0 = 0 \\ (n+r)^2 c_n + c_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} r_1 = r_2 = 0 \\ c_n = -\frac{c_{n-1}}{(n+r)^2} \end{array}$$

para r = $r_1 = r_2 = 0$, $\quad c_n = -\dfrac{c_{n-1}}{n^2} \quad \forall\, n \geq 1.$

para $\quad n = 1, \quad c_1 = -\dfrac{c_0}{1^2}$

$n = 2, \quad c_2 = -\dfrac{c_1}{2^2} = \dfrac{c_0}{2^2}$

$n = 3, \quad c_3 = -\dfrac{c_2}{3^2} = -\dfrac{c_0}{2^2.3^2}$

$n = 4, \quad c_4 = -\dfrac{c_3}{4^2} = \dfrac{c_0}{2^2.3^2.4^2}$

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{(n!)^2} \quad \text{para } c_0 = 1$$

$$Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$$

ahora calculamos la segunda solución $Y_2(x)$ pero como $r_1 = r_2 = 0$ por la parte c) del teorema se tiene

$$Y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r} + Y_1(x)\ln x$$

$$Y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + Y_1(x)\ln x, \quad \text{donde } r = 0.$$

$$Y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}\right)\ln x$$

calculando las derivadas se tiene:

$$Y_2'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2}\right)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$$

$$Y_2''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} + \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)(-1)^n x^{n-2}}{(n!)^2}\right)\ln x$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-2}}{(n!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-1} + \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2}\right)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^n}{(n!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2}\right)\ln x$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}\right)\ln x = 0$$

agrupando las series se tiene:

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) +$$

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}\right) Lnx +$$

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x}{(n!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}\right) = 0$$

poniendo las x en una misma potencia.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) b_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) +$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^{n+1} x^n}{((n+1)!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^{n+1} x^n}{((n+1)!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}\right) Lnx$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+1}x^n}{((n+1)!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n x^n}{(n!)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}\right)=0$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)b_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)b_{n+1}+b_n)x^n\right)+$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+1}x^n}{((n+1)!)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}+\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\right)x^n\right)\ln x+$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}+\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\right)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{(n!)^2}x^n\right)=0$$

poniendo los inicios iguales tenemos

$$\left(b_1+b_0+\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)^2 b_{n+1}+b_n)x^n\right)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(n+1)(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}+\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\right)x^n.\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}+\frac{(n+1)(-1)^n}{(n!)^2}\right)x^n=0$$

$$b_1+b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)^2 b_{n+1}+b_n+\frac{n^2+2n}{(n+1)(n!)^2}(-1)^n\right]x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(-1)^n}{(n+1)(n!)^2}x^n\ln x=0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} b_1+b_0=0\Rightarrow b_1=-b_0 \\ (n+1)^2 b_{n+1}+b_n+\dfrac{n^2+2n}{(n+1)(n!)^2}(-1)^n=0 \end{cases}\qquad \text{para } b_0=1\Rightarrow b_1=-1$$

$$b_{n+1}=\frac{-1}{(n+1)^2}\left[b_n+\frac{n^2+2n}{(n+1)(n!)^2}(-1)^n\right]\quad \forall\, n\geq 1$$

para $n=1$, $\quad b_2=-\dfrac{1}{2^2}\left[b_1-\dfrac{3}{2}\right]=\dfrac{5}{8}$

$n=2$, $\quad b_3=-\dfrac{1}{9}\left[b_2+\dfrac{8}{12}\right]=-\dfrac{1}{9}\left[\dfrac{5}{8}+\dfrac{2}{3}\right]=-\dfrac{31}{216}$

$n=3$, $\quad b_4=-\dfrac{1}{16}\left[b_3-\dfrac{15}{24}\right]=-\dfrac{1}{16}\left[-\dfrac{31}{216}-\dfrac{15}{24}\right]=\dfrac{83}{1728}$

$$Y_2(x)=\left(1-x+\frac{5}{8}x^2-\frac{31}{216}x^3+\frac{83}{1728}x^4+\dots\right)+Y_1(x)\ln x$$

Luego la solución general es $Y(x)=c_1\, Y_1(x)+c_2\, Y_2(x)$

Ejemplo: Aplicando Frobenius, hallar la solución general de la ecuación diferencial.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(x^2-2x)\frac{dy}{dx}+2y=0$$

Solución

como $x_0=0$ es un punto singular regular, la primera solución es $Y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}$.

cuyas derivadas son: $\dfrac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$

reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}+(x^2-2x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r+1}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)c_n x^{n+r}+2\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-3)+2]c_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r+1}=0$$

poniendo las x en una misma potencia.

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-3)+2]c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r} = 0$$

poniendo los inicios iguales se tiene.

$$[r(r-3)+2]c_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-3)+2]c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r} = 0$$

$$[r(r-3)+2]c_0x^r + x^r\sum_{n=1}^{\infty}\left([(n+r)(n+r-3)+2]c_n + (n+r-1)c_{n-1}\right)x^n = 0$$

$$[r^2-3r+2]c_0x^r + x^r\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r-1)(n+r-2)c_n + (n+r-1)c_{n-1}]x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} r^2-3r+2=0 & \Rightarrow \quad r_1=2,\ \ r_2=1 \\ (n+r-1)(n+r-2)c_n+(n+r-1)c_{n-1}=0 \end{cases}$$

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n+r-2} \quad \forall\ n \geq 1$$

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n}$$

Para $n=1$, $\quad c_1 = -\frac{c_0}{1}$

$n=2$, $\quad c_2 = -\frac{c_1}{2} = \frac{c_0}{1.2}$

$n=3$, $\quad c_3 = -\frac{c_2}{3} = -\frac{c_0}{1.2.3}$

$n=4$, $\quad c_4 = -\frac{c_3}{4} = \frac{c_0}{1.2.3.4}$

$\vdots$

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{1.2.3.4\ldots n} = \frac{(-1)^n c_0}{n!}$$

como $\quad y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = c_0x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+2}$

$$y_1(x) = c_0x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n c_0 x^{n+2}}{n!} = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{n!}$$

para $\quad c_0 = 1 \neq 0,\ \ y_1(x) = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!} = x^2e^{-x}$

ahora calculamos la segunda solución $y_2(x)$

pero como $r_1 - r_2 = 2 - 1 = 1$ es un entero, entonces la solución es

$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} + c_0y_1(x)\ln x$, donde $b_0 = 1$

para calcular b_n y c_0 utilizaremos un método alternativo en lugar de usar el método de derivar y reemplazar en la ecuación diferencial.

El método alternativo consiste en lo siguiente:

Sea $Y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r}[(r-r_2)t(r_1x)]\Big|_{r=r_2}$, donde los coeficientes de $Y(r_1x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ se mantiene en función de r, de acuerdo a la fórmula de recurrencia.

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{r+n-2} \quad \forall\ n \geq 1$$

$n=1$, $\quad c_1 = -\frac{1}{r-1}c_0$

$n=2$, $\quad c_2 = -\frac{c_1}{r} = \frac{(-1)^2}{r(r-1)}$

$n=3$, $\quad c_3 = -\frac{c_2}{r+1} = \frac{(-1)^3 c_0}{r(r-1)(r+1)}$

$n=4$, $\quad c_4 = -\frac{c_3}{r+2} = \frac{(-1)^4 c_0}{r(r-1)(r+1)(r+2)}$

$$Y(r_1x) = c_0x^r + c_1x^{r+1} + c_2x^{r+2} + c_3x^{r+3} + c_4x^{r+4} + \ldots$$

$$Y(r_1x) = c_0x^r + \frac{(-1)^1}{r-1}c_0x^{r+1} + \frac{(-1)^2}{r(r-1)}c_0x^{r+2} + \frac{(-1)^3}{r(r-1)(r+1)}c_0x^{r+3}+\dots$$

$(r - r_2)\, y\,(r_1\, x) = (r - 1)\, y\,(r_1\, x)$

$$= c_0\left[(r-1)x^r + (-1)^1x^{r+1} + \frac{(-1)^2}{r}x^{r+2} + \frac{(-1)^3x^{r+3}}{r(r+1)}+\dots\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r-1)(r_1x) = c_0\left[x^r + (r-1)x^r\ln x + (-1)^1x^{r+1}\ln x - \frac{1}{r^2}x^{r+2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}x^{r+2}\ln x + \frac{2r+1}{(r^2+r)^2}x^{r+3} - \frac{1}{r^2+r}x^{r+3}\ln x+\dots\right]$$

$$Y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r}[(r-1)y(r_1x)]\Big|_{r=1} = c_0\left[x - x^2\ln x - x^3 + x^3\ln x + \frac{3}{4}x^4 - \frac{x^4}{2}\ln x+\dots\right]$$

$$Y_2(x) = c_0\left(x - x^3 + \frac{3}{4}x^4+\dots\right) + c_0\left(-x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2}+\dots\right)\ln x$$

$$Y_2(x) = c_0x\left(1 - x^2 + \frac{3}{4}x^3+\dots\right) + c_0x^2\left(-1 + x - \frac{x^2}{2}+\dots\right)\ln x$$

para $c_0 = 1 \neq 0$ se tiene.

$$Y_2(x) = x\left(1 - x^2 + \frac{3}{4}x^3+\dots\right) - \underbrace{x^2\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots\right)}\ln x$$

$$Y_2(x) = x\left(1 - x^2 + \frac{3}{4}x^3+\dots\right) - Y_1(x)\ln x$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es: $Y(x) = c_1\,Y_1(x) + c_2\,Y_2(x)$.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial.

$$(x^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2y = x + \frac{3}{x^2}, \text{ alrededor del punto singular regular } x_0 = 0.$$

Solución

En primer lugar hallaremos la solución en series de potencias de la ecuación diferencial homogénea $Y_g(x)$ y después hallaremos una solución particular $Y_p(x)$ de la ecuación diferencial no homogénea.

Entonces calcularemos la solución en series de potencia de la ecuación diferencial $(x^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2y = 0$ la solución 1° en series de potencias es $Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$

donde sus derivadas son:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$$(x^2 - x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)c_nx^{n+r-1}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}2c_nx^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1) - 2]c_nx^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}[3(n+r) - (n+r)(n+r-1)]c_nx^{n+r-1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1) - 2]c_nx^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-4)c_nx^{n+r-1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r-1)(n+r-2) - 2]c_{n-1}x^{n+r-1} - (r-4)c_0x^{r-1}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-4)c_nx^{n+r-1} = 0$$

$$r(r-4)c_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-3)c_{n-1}x^{n+r-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-4)c_nx^{n+r-1}=0$$

$$r(r-4)c_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-3)c_{n-1}-(n+r)(n+r-4)c_n]x^{n+r-1}=0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} r(r-4)=0 & \Rightarrow r_2=0,\quad r_1=4 \\ (n+r)(n+r-3)c_{n-1}-(n+r)(n+r-4)c_n=0 \end{cases}$$

$$c_n=\frac{(n+r-3)c_{n-1}}{n+r-4}\qquad \forall\, n\geq 1$$

para $\quad r=r_1=4,\qquad c_n=\dfrac{n+1}{n}c_{n-1},\qquad \forall\, n\geq 1$

para $\quad n=1,\qquad c_1=\dfrac{2}{1}c_0=2c_0$

$n=2,\qquad c_2=\dfrac{3}{2}c_1=3c_0$

$n=3,\qquad c_3=\dfrac{4}{3}c_2=4c_0$

$$Y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=x^4\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_0x^n \quad \text{para } c_0=1$$

$$Y_1(x)=x^4\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Se conoce que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\therefore\ Y_1(x)=x^4\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x^4}{(1-x)^2}$$

ahora calculamos la segunda solución Y_2 (x). como $r_1 - r_2 = 4$ entero, entonces la segunda solución es: $Y_2(x)=\dfrac{\partial}{\partial r}[(r-0)y(rx)]\Big|_{r=0}$, donde $Y(rx)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ de la fórmula de recurrencia se tiene: $c_n=\dfrac{c+r-3}{n+r-4}c_{n-1}\quad \forall\, n\geq 1$

para $\quad n=1,\qquad c_1=\dfrac{r-2}{r-3}c_0$

$n=2,\qquad c_2=\dfrac{r-1}{r-2}c_1=\dfrac{r-1}{r-3}c_0$

$n=3,\qquad c_3=\dfrac{r}{r-1}c_2=\dfrac{r}{r-3}c_0$

$n=4,\qquad c_4=\dfrac{r+1}{r}c_3=\dfrac{r+1}{r-3}c_0$

$n=5,\qquad c_5=\dfrac{r+2}{r+1}c_4=\dfrac{r+2}{r-3}c_0$

$$Y(rx)=x^r\left(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\dots\right)$$

$$=x^r\left(c_0+\frac{r-2}{r-3}c_0x+\frac{r-1}{r-3}c_0x^2+\frac{r}{r-3}c_0x^3+\frac{r+1}{r-3}c_0x^4+\frac{r+2}{r-3}c_0x^5+\dots\right)$$

$$rY(rx)=c_0\left(rx^r+\frac{r(r-2)}{r-3}x^{r+1}+\frac{r(r-1)}{r-3}x^{r+2}+\frac{r^2}{r-3}x^{r+3}+\frac{r(r+1)}{r-3}x^{r+4}+\frac{r(r+2)}{r-3}x^5+\dots\right)$$

$$Y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r}[rY(rx)]\Big|_{r=0} = c_0\left(1+\frac{2}{3}x+\frac{x^2}{3}\right) \quad \text{para } c_0 = 1$$

$$Y_2(x) = 1+\frac{2x}{3}+\frac{x^2}{3}$$

Luego la solución general de la ecuación homogénea.

$$Y_2(x) = c_1\frac{x^4}{(1-x)^2}+c_2\left(1+\frac{2x}{3}+\frac{x^2}{3}\right)$$

ahora calculamos una solución particular

$Y_p(x)$ de la ecuación $(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-2y = x+\frac{3}{x^2}$

La solución particular $Y_p(x)$ se puede calcular por cualquiera de los métodos anteriores, variación de parámetros ó reducción de orden, en particular lo calcularemos por series, para esto aplicaremos el método de superposición.

Sea $Yp_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ una solución de la ecuación diferencial

$(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-2y = x$ calculando sus derivadas se tiene:

$$\frac{dYp_1(x)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} \text{ y } \frac{d^2Yp_1(x)}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

reemplazando en la ecuación diferencial (Ver la parte de la primera solución)

$$-r(r-4)c_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-4)c_n - (n+r)(n+r-3)c_{n-1}]x^{n+r-1} = x$$

La igualdad se cumple si y sólo si.

$r-1=1$ y $n+r-1=1$, de donde $r=2$, $n=0$

se observa que n no admite más valores entonces:

$$-r(r-4)\,c_0 = 1 \;\Rightarrow\; 4c_0 = 1 \;\Rightarrow\; c_0 = \frac{1}{4} \quad \text{como} \quad Y_{p_1}(x) = c_0x^r = \frac{x^2}{4}$$

en la misma forma calculamos $Y_{p_2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$

la solución de $(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-2y = \frac{3}{x^2}$

haciendo todos los cálculos anterior se tiene:

$$-r(r-4)c_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-4)c_n - (n+r)(n+r-3)c_{n-1}]x^{n+r-1} = 3x^{-2}$$

la igualdad se cumple si y sólo si

$r-1=-2$ y $n+r-1=-2$ de donde $r=-1$ y $n=0$

además $-r(r-4)\,c_0 = 3$ para $r=-1$

$$-5\,c_0 = 3 \;\Rightarrow\; c_0 = -\frac{3}{5}$$

$$Yp_2(x) = c_0x^r = -\frac{3x^{-1}}{5}$$

La solución particular es $Yp(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3x^{-1}}{5}$

La solución general es $Y(x) = Yg(x) + Yp(x)$.

$$Y(x) = \frac{c_1x^4}{(1-x)^2} + c_2\left(1+\frac{2x}{3}+\frac{x^2}{3}\right) + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^{-1}}{5}$$

9.3. Dos Ecuaciones Diferenciales Especiales

9.3.1 Ecuación de Bessel y Función de Bessel del Primer Tipo

La ecuación diferencial $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0$ se llama ecuación de Bessel de orden P con $P \geq 0$, la ecuación de Bessel es una ecuación diferencial de segundo orden.

La ecuación de Bessel surgió en el estudio de la radiación de energía y aparecen frecuentemente en estudios avanzados de matemática aplicada, física e ingeniería y particularmente en aquellos en que el modelo matemático se expresa naturalmente en coordenadas cilíndricas; ahora buscaremos las soluciones en serie de potencias alrededor del punto $x_0 = 0$ el cual es un punto singular regular;

sea $\quad Yp_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ la primera solución, calculando las derivadas se tiene:

$$\frac{dy_1}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y_1}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada.

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}+(x^2-p^2)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r+2}-\sum_{n=0}^{\infty}p^2c_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+r)^2-p^2)c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r+2}=0$$

poniendo las x en una misma potencia.

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)^2-p^2]c_nx^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+r}=0,$$

poniendo los inicios iguales.

$$(r^2-p^2)c_0x^r+((1+r)^2-p^2)c_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+r)^2-p^2]c_nx^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+r}=0$$

$$(r^2-p^2)c_0x^r+[(1+r)^2-p^2]c_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[((n+r)^2-p^2)c_n+c_{n-2}\right]x^{n+r}=0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados

$$\begin{cases}(r^2-p^2)c_0=0 & r_1=p,\quad r_2=-p\\ ((1+r)^2-p^2)c_1=0 & \Rightarrow (r^2+2r+1-p^2)c_1=0\\ [(n+r)^2-p^2]c_n+c_{n-2}=0\end{cases}$$

de donde:

$$c_n=-\frac{c_{n-2}}{(n+r)^2-p^2},\quad \forall\ n\geq 2$$

para $\quad r_1=p \;\Rightarrow\; (p^2+2p+1-p^2)c_1=0$

$\Rightarrow\; (2p+1)\,c_1=0 \;\Rightarrow\; c_1=0$

como $\quad c_n=-\dfrac{c_{n-2}}{n(2p+n)}\ \forall\ n\geq 2$

para $\quad n=2,\quad c_2=-\dfrac{c_0}{2(2p+2)}$

$n=3,\quad c_3=-\dfrac{c_1}{3(2p+3)}=0$

$n=4,\quad c_4=-\dfrac{c_2}{4(2p+4)}=\dfrac{c_0}{2.4(2p+2)(2p+4)}$

$n=5,\quad c_5=-\dfrac{c_3}{5(2p+5)}=0$

$n=6,\quad c_6=-\dfrac{c_4}{6(2p+6)}=-\dfrac{c_0}{2.4.6(2p+2)(2p+4)(2p+6)}$

$n=7,\quad c_7=-\dfrac{c_5}{7(2p+7)}=0$

$n=8,\quad c_8=-\dfrac{c_6}{8(2p+8)}=\dfrac{c_0}{2.4.6.8(2p+2)(2p+4)(2p+6)(2p+8)}$

$n=9,\quad c_9=-\dfrac{c_7}{9(2p+9)}=0$

Luego la solución $Y_1(x)$ queda expresado así:

$$Y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n c_0 x^{2n+p}}{2^{2n}.n!(p+1)(p+2)(p+3)\dots(p+n)}$$

donde c_0 es una constante arbitraria. En particular tomamos $c_0=\frac{1}{2^{\Gamma}\Gamma(p+1)}$, la solución anterior se transforma en la siguiente solución particular

$$Y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+p}.n!(p+1)(p+2)(p+3)\dots(p+n)\Gamma(p+1)}x^{2n+p}$$

En forma simplificada queda en la forma:

$$Y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1).\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

la cual se denomina "Función de Bessel de orden P de primer Tipo, y denotaremos por $J_p(x)$, es decir:

$$J_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1).\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Observación: Como casos particulares

1) Si $r=p=0$ se tiene $J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$

2) Si $r=m=$ entero no negativo, nos queda.

$$J_m(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!.(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}$$

ahora calculamos la segunda solución $Y_2(x)$, en este caso debemos tener cuidado en la solución $Y_2(x)$, para dar la solución general de la ecuación de BESSEL.

1° caso. Si $r_1-r_2=2p\neq$ de un entero y $P>0$ entonces estamos en la parte a) del teorema anterior por lo tanto una segunda solución se obtiene sustituyendo P por -P es decir:

$$J_{-p}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1).\Gamma(n-p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

Luego la solución general de la ecuación de BESSEL de orden P es:

$Y(x)=c_1 J_p(x)+c_2 J_{-p}(x)$

2° caso. **Si $r_1=r_2=p=0$ se observa que $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son iguales.**

3° caso. **Cuando $r_1-r_2=2p$ es un entero y P es un entero. La segunda solución es $J_2(x)=J_{-p}(x)$, donde $Y_p(x)=\frac{\cos P\pi J_p(x)-J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} P\pi}$, y la solución general es:**

$Y=c_1 J_p(x)+c_2 Y_p(x)$

Nota: A la función $Y_p(x)=\frac{\cos P\pi J_p(x)-J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} P\pi}$ se denomina funciones de Bessel de segundo tipo.

Ejemplo: Hallar la solución general de la ecuación

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0 \qquad \text{en } 0<x<\infty.$$

Solución

Identificamos que $P^2=\frac{1}{4} \Rightarrow P=\frac{1}{2},\ P=-\frac{1}{2}$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es

$Y(x)=c_1 J_{1/2}(x)+c_2 J_{-1/2}(x)$

Ejemplo: Hallar la solución general de la ecuación

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-9)y=0$$

Solución

identificamos que $P^2=9$ de donde $P=3$; la solución general es:

$Y(x)=c_1 J_3(x)+c_2 Y_3(x)$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $4x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+(x-4)y=0$

Solución

Lo transformamos a una ecuación de Bessel mediante la sustitución $u=\sqrt{x}\Rightarrow x=u^2$

mediante la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)=\frac{1}{2u}\left(\frac{dy}{dy}\right)\quad,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{du}\left(\frac{1}{2u}\left(\frac{dy}{du}\right)\right)\frac{1}{2u}=\left(-\frac{1}{2u^2}\left(\frac{dy}{du}\right)+\frac{1}{2u}\left(\frac{d^2y}{du}\right)\right)\frac{1}{2u}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4u^3}\frac{dy}{du}+\frac{1}{4u^2}\frac{d^2y}{du^2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$$4u^4\left(\frac{1}{4u^2}\left(\frac{d^2y}{du^2}\right)-\frac{1}{4u^3}\left(\frac{dy}{du}\right)\right)+4u^2\,\frac{1}{2u}\left(\frac{dy}{du}\right)+(u^2-4)y=0$$

$$u^2\frac{d^2y}{du^2}-u\frac{dy}{du}+2u\frac{dy}{du}+(u^2-4)y=0$$

$u^2\frac{d^2y}{du^2}+u\frac{dy}{du}+(u^2-4)y=0$ es la ecuación de Bessel de orden 2.

Ahora identificando $P^2=4$ de donde $P=2$

Luego la solución general de la ecuación es:

$Y(u)=c_1J_2(u)+c_2J_2(u)$

$$\therefore\quad Y(x)=c_1J_2(\sqrt{x})+c_2J_2(\sqrt{x})$$

9.3.2 Ecuación paramétrica de Bessel

La ecuación diferencial de la forma

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(\lambda^2x^2-p^2)y=0$$

se denomina "Ecuación paramétrica de Bessel" y la solución general es dado por:

$Y(x)=c_1J_p(\lambda x)+c_2y_p(\lambda x)$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(9x^2-4)y=0$

Solución

Identificamos que $\lambda^2=9$ y $P^2=4$ de donde $\lambda=3$, $P=2$.

Luego la solución general es:

$Y(x)=c_1J_2(3x)+c_2y_2(3x)$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(4x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$$

Solución

Identificamos que $\lambda^2=4$ y $P^2=\frac{1}{9}$ de donde $\lambda=2$, $P=\frac{1}{3}$.

Luego la solución general es:

$Y(x)=c_1J_{1/3}(2x)+c_2Y_{1/3}(2x)$

9.3.3 Ecuación de Legendre:

A la ecuación diferencial de la forma:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

se denomina Ecuación de Legendre de orden n.

9.3.3.1 Solución de la ecuación de Legendre

Como $x_0 = 0$, es un punto ordinario de la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

entonces admite una solución en serie de potencia $Y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k$, de donde sus derivadas son $\frac{dy}{dx}=\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}$,

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-2x\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}+n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k-\sum_{k=1}^{\infty}2kc_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}n(n+1)c_kx^k=0$$

poniendo las x en un mismo exponente.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k-1)c_{k+2}x^k-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k-\sum_{k=1}^{\infty}2kc_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}n(n+1)c_kx^k=0$$

poniendo los inicios iguales se tiene.

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)(k+2)c_{k+2}+n(n+1)c_k]x^k-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k-\sum_{k=1}^{\infty}2kc_kx^k=0$$

$$2c_2+n(n+1)c_0+(6c_3+n(n+1)c_1)x-2c_1x+$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}[(k+1)(k+2)c_{k+2}+n(n+1)c_k]x^k-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k-\sum_{k=2}^{\infty}2kc_kx^k=0$$

$$2c_2+n(n+1)c_0+(6c_3+[n(n+1)-2]c_1)x+$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}((k+1)(k+2)c_{k+2}+[n(n+1)-k(k+1)]c_k)x^k=0$$

ahora aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} 2c_2+n(n+1)c_0=0 \\ 6c_3+(n(n+1)-2)c_1=0 \\ (k+1)(k+2)c_{k+2}+(n(n+1)-k(k+1)c_k=0 \end{cases}$$

de donde se tiene que:

$$c_2=-\frac{n(n+1)}{2}c_0=-\frac{n(n+1)}{2!}c_0$$

$$c_3=-\frac{n(n+1)-2}{6}c_1$$

$$=-\frac{(n+2)(n-1)}{3!}c_1$$

$$c_{k+2}=-\frac{n(n+1)-k(k+1)}{(k+1)(k+2)}c_k=-\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}c_k$$

$$c_{k+2}=-\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}c_k \qquad \forall\ k\geq 2$$

es la fórmula de recurrencia.

Para $k = 2,\quad c_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{3.4}c_2 = \frac{(n-2)(n+1)n(n+3)}{4!}c_0$

$k = 3,\quad c_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{4.5}c_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}c_1$

$k = 4,\quad c_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{5.6}c_4 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+3)(n+5)}{6!}c_0$

$k = 5,\quad c_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{6.7}c_5 = -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}c_1$

etc., así, por lo menos para $|x| < 1$ se obtiene dos soluciones en series de potencia linealmente independiente.

$$Y_1(x) = c_0 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2c_0 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4c_0$$

$$-\frac{(n-4)(n-2)n(n+3)(n+5)}{6!}x^6c_0 + \ldots$$

$$Y_2(x) = c_1x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3c_1 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5c_1$$

$$-\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7c_1 + \ldots$$

$$Y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \right.$$

$$\left. -\frac{(n-4)(n-2)n(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \ldots\right]$$

$$Y_2(x) = c_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \right.$$

$$\left. -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7 + \ldots\right]$$

Luego la solución general de la ecuación de Legendre es

$$Y(x) = a_1\, Y_1(x) + a_2\, Y_2(x)$$

observemos que si n es un entero par, la primera serie termina, y la segunda $Y_2(x)$ es una serie infinita en forma similar cuando n es un entero impar la serie $Y_2(x)$ termina con x^n, es decir, que se obtiene una solución polinomial de grado n de la ecuación de Legendre.

En la solución de la ecuación de Legendre se acostumbra a elegir valores específicos para c_0 y c_1 dependiendo si n es entero positivo par ó impar respectivamente, para $n = 0$, elegimos $c_0 = 1$, y para $n = 2,4,6,\ldots,\ c_0 = (-1)^{n/2}\frac{1.3.\ldots.(n-1)}{2.4.6.\ldots n}$, en tanto que para $n = 1$ elegimos $c_1 = 1$, y para $n = 3,5,7,\ldots,\ c_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1.3\ldots n}{2.4.6\ldots(n-1)}$ por ejemplo para $n = 4$ se tiene.

$$Y_1(x) = (-1)^{\frac{4}{2}}\frac{1.3}{2.4}\left(1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\right)$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{30}{8}x^2 + \frac{35}{8}x^4$$

$$= \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$

9.3.3.2 Polinomios de Legendre

A las soluciones polinomiales especificas de grado n de la ecuación de Legendre se denominan "Polinomios de Legendre" y denotaremos $P_n(x)$ con las series obtenidas para $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ y los valores dadas para c_0 y c_1, encontramos que, los primeros polinomios de Legendre son:

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$, $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Observemos que $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$,... son a su vez soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales.

$$n = 0, \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$n = 1, \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$n = 2, \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$n = 3, \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

El polinomio general de Legendre se expresa en forma general por:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} \text{ ; donde}$$

$\left[\frac{n}{2}\right]$ es el mayor entero menor ó igual a $\frac{n}{2}$

Ejercicios Propuestos:

I. Resuelva cada ecuación diferencial mediante series de potencias de la forma $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$.

1) $\frac{dy}{dx} - x^2y = 0$ 2) $(1-x)\frac{dy}{dx} - y = 0$

3) $(1+x)\frac{dy}{dx} - 2y = 0$ 4) $(2x-1)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

5) $\frac{dy}{dx} + x^3y = 0$ 6) $(1+x)\frac{dy}{dx} - ny = 0$

7) $(x-2)\frac{dy}{dx} + y = 0$ 8) $2(x-1)\frac{dy}{dx} = 3y$

9) $x\frac{dy}{dx} + y = 0$ 10) $x^3\frac{dy}{dx} = 2y$

II. Resolver cada ecuación diferencial por medio de las series de potencias.

1) $(2x-1)\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0$ 2) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

3) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ 4) $2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$

5) $\frac{d^2y}{dx^2} - (x+1)y = 0$ 6) $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0$

7) $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ 8) $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$

9) $\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$ 10) $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} - 3xy = 0$

III. Encuentre en cada ecuación diferencial dos soluciones en series de potencias entorno al punto ordinario x = 0 que sean linealmente independiente.

1) $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0$ 2) $(x^2-3)y'' + 2xy' = 0$

3) $(x^2+1)y'' + 6xy' + 4y = 0$ 4) $(x^2-1)y'' + 8xy' + 12y = 0$

5) $(x^2-1)y'' - 6xy' + 12y = 0$ 6) $(x^2+3)y'' - 7xy' + 16y = 0$

7) $(2-x^2)y'' - xy' + 16y = 0$ 8) $y'' - x^2y' - 3xy = 0$

9) $y'' + xy' + 2y = 0$ 10) $(x^2-4)y'' + 3xy' + y = 0$

11) $y'' + 2xy' + 4y = 0$ 12) $(x^2+2)y'' + 4xy' + 2y = 0$

13) $y'' + xy' + y = 0$ 14) $3y'' + xy' - 4y = 0$

15) $5y'' - 2xy' + 10y = 0$ 16) $y'' = xy$

17) $y'' - xy' + 2y = 0$ 18) $y'' + x^2y' + xy = 0$

19) $(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$ 20) $(x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$

21) $(x^2 + 1)y'' - 6y = 0$ 22) $y'' - (x + 1)y' - y = 0$

23) $y'' - xy' - (x + 2)y = 0$ 24) $(x + 2)y'' + xy' - y = 0$

25) $y'' + (1 + x + x^2)y = 0$ 26) $(1 - x)y'' + (2 + x)y' - 2y = 0$

27) $(1 + x)y'' + 2y' - y = 0$ 28) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

29) $xy'' + y' + xy = 0$ 30) $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$

31) $(2x^2 - 3x + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ 32) $(x^2 + 1)^2 y'' - 4x(x^2 + 1)y' + (6x^2 - 2)y = 0$

33) $y'' - (1 + x)y = 0$ 34) $(2x - 1)y'' - 3xy' = 0$

35) $y'' + 2xy' + 2y = 0$ 36) $(x - 1)y'' + y' = 0$

IV. Mediante series de potencias resuelva los problemas con condiciones iniciales.

1) $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

2) $(x + 1)y'' - (2 - x)y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

3) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

4) $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

5) $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$

6) $y'' + xy' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

7) $(x^2 + 6x)y'' + (3x + 2)y' - 3y = 0$, $y(-3) = 0$, $y'(-3) = 2$

8) $y'' + (x - 1)y' + y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$

9) $y'' - 2xy' + 8y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$

10) $(x^2 + 1)y'' + 2xy' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

11) $(2x - x^2)y'' - 6(x - 1)y' - 4y = 0$. $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$

12) $(x^2 - 6x + 10)y'' - 6(x - 1)y' - 4y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$

13) $y'' - xy' + y - 1 = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$

14) $(4x^2 + 16x + 17)y'' = 8y$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = 0$

V. Resuelva las siguientes ecuaciones mediante series de potencias.

1) $y'' + (\text{sen } x)y = 0$ 2) $y'' + e^{-x} y = 0$

3) $\cos x.y'' + y = 0$ 4) $y'' + e^x y' - y = 0$

5) $y'' - xy = 1$ 6) $xy'' + (\text{sen } x)\, y = 0$

7) $xy'' + \text{sen } x.y' + xy = 0$ 8) $y'' - 4xy' - 4y = e^x$

VI. Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando el método de FROBENIUS.

1) $2xy'' + (1 - 2x^2)y' - 4xy = 0$ 2) $xy'' + 2y' + 9xy = 0$

3) $xy'' - y' + 4x^2y = 0$ 4) $xy'' + y' + x(1 + x)y = 0$

5) $xy'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0$ 6) $9xy'' + 9y' + xy = 0$

7) $xy'' + y' + 4xy = 0$ 8) $xy'' + 2y' - 4xy = 0$

9) $2xy'' - y' + 2y = 0$ 10) $3xy'' + (2 - x)y' - y = 0$

11) $2x(1 - 2x)y'' + (4x^2 + 1)y' - (2x + 1)y = 0$

12) $x^2 y'' + x\left(x - \frac{1}{2}\right) y' + \frac{1}{2} y = 0$

13) $x^2y'' + (1 + 3x)xy' - (1 + 6x)y = 0$ 14) $xy'' + 2y' + xy = 0$

15) $2xy'' + 5y' + xy = 0$ 16) $x^2y'' + x(x - 1)y' + y = 0$

17) $4xy'' + 8y' + xy = 0$ 18) $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$

19) $2xy'' + (x + 1)y' + y = 0$ 20) $2xy'' + 3y' - y = 0$

21) $3xy'' + 2y' + 2y = 0$ 22) $2xy'' + (1 - 2x^2)y' - 4xy = 0$

23) $2x^2y'' + xy' - (1 + 2x^2)y = 0$ 24) $2x^2y'' + 7x(1 + x)y' - 3y = 0$

25) $2x^2y'' + xy' - (3 - 2x^2)y = 0$ 26) $6x^2y'' + 7xy' - (x^2 + 2)y = 0$

27) $2x^2y'' - xy' + (x^2 + 1)y = 0$ 28) $2xy'' - (3 + 2x)y' + y = 0$

29) $2x^2y'' + (-7 + 2x)xy' + (7 - 5x)y = 0$

30) $2x^2y'' + 3xy' - (x^2 + 1)y = 0$

31) $2x^2y'' + 3xy' + (2x - 1)y = 0$ 32) $x(x - 2)y'' + y' - 2y = 0$

33) $2x^2y'' + x(x + 1)y' - (2x + 1)y = 0$

34) $x^2y'' + 3xy' + (1 + x + x^3)y = 0$

35) $x^2y'' + x(1 + x)y' - (1 - 3x + 6x^2)y = 0$

36) $4x^2y'' - 4xy' + (3 - 4x^2)y = 0$

37) $x^2y'' + (2x + 3x^2)y' - 2y = 0$ 38) $x^2y'' - xy' + (x^2 + 1)y = 0$

39) $2x(1 - x)y'' + (1 - 2x)y' + (2 + x)y = 0$

40) $x(x - 2)^2y'' - 2(x - 2)y' + 2y = 0$

41) $2xy'' + (1 - x)y' - (1 + x)y = 0$ 42) $x^2y'' + (2x^2 - 3x)y' + 3y = 0$

43) $x^3(x - 1)y'' + (x - 1)y' + 4xy = 0$ 44) $2x^3y'' - x(2 - 5x)y' + y = 0$

45) $(2x^2 + 5x^3)y'' + (3x - x^2)y' - (1 + x)y = 0$

46) $9x(1 - x)y'' - 12y' + 4y = 0$

47) $x^2y'' - 2xy' + 4(x^4 - 1)y = 0$ 48) $2x^2y'' - x(x - 1)y' - y = 0$

49) $x^2y'' + (x^2 - 3x)y' + 4y = 0$ 50) $x(1 - x)'' - 3y' + 2y = 0$

VII. Mediante series de potencias encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada, en $0 < x < \infty$ (Bessel)

1) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$ 2) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$

3) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$ 4) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{4}{9}\right)y = 0$

5) $xy'' + y' + xy = 0$ 6) $\frac{d}{dx}(xy') + \left(x - \frac{4}{x}\right)y = 0$

7) $x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$ 8) $x^2y'' + xy' + \left(36x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$

9) $4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 25)y = 0$ 10) $16x^2y'' + 16xy' + (16x^2 - 1)y = 0$

11) $x^2y'' + xy' + (9x^2 - 4)y = 0$ 12) $xy'' + 3y' + xy = 0$

13) $xy'' - y' + 36x^3y = 0$ 14) $x^2y'' - 5xy' + (8 + x)y = 0$

15) $2x^2y'' + 3xy' - 2(4 - x^5)y = 0$ 16) $4x^2y'' - 12xy' + (15 + 16x)y = 0$

17) $x^2y'' + 3xy' + (1 + x^2)y = 0$ 18) $16x^2y'' + 24xy' + (1 + 44x^3)y = 0$

19) $36x^2y'' + 60xy' + (9x^3 - 5)y =$ 20) $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$

VIII.

1) Comprobar que la ecuación diferencial $xy'' + (1 - 2n)y' + xy = 0$, $x > 0$, tiene la solución particular $y = x^n J_n(x)$

2) Comprobar que la ecuación diferencial $xy'' + (1 + 2n)y' + xy = 0$, $x > 0$, tiene la solución particular $y = x^{-n} J_n(x)$

3) Comprobar que la ecuación diferencial $x^2y'' + \left(\lambda^2x^2 - \nu^2 + \frac{1}{4}\right) . y = 0$ $x > 0$, tiene la solución particular $y = \sqrt{x}J_\nu(\lambda x)$, $\lambda > 0$.

APENDICE

I. IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

1) $\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen}A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen}B$

2) $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen}A \operatorname{sen}B$

3) $\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$ 4) $\operatorname{sen}2A = 2\operatorname{sen}A.\cos A$

5) $\operatorname{sen}^2 A = \frac{1}{2}(1-\cos 2A)$ 6) $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$

7) $\operatorname{sen} mA.\cos nA = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)A + \operatorname{sen}(m-n)A]$

8) $\operatorname{sen} mA.\operatorname{sen} nA = -\frac{1}{2}[\cos(m-n)A - \cos(m+n)A]$

9) $\cos mA.\cos nA = \frac{1}{2}[\cos(m-n)A + \cos(m+n)A]$

10) $\operatorname{sen}(\pi - A) = \operatorname{sen}A$; $\cos(\pi - A) = -\cos A$

11) $\operatorname{sen} A = \cos(A - \frac{\pi}{2}) = \cos(\pi/2 - A)$

12) $\cos A = \operatorname{sen}(A + \pi/2) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - A)$

13) $\operatorname{sen}(-A) = -\operatorname{sen}A$; $\cos(-A) = \cos A$

14) $\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = 2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$

15) $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$

16) $\cos A - \cos B = 2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}.\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$

17) $\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B}{1 - \operatorname{tg}A.\operatorname{tg}B}$ 18) $\operatorname{tg}(A-B) = \frac{\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}B}{1 + \operatorname{tg}A.\operatorname{tg}B}$

II. FUNCIONES HIPERBOLICAS

1) $\operatorname{Senh}A = \frac{e^A - e^{-A}}{2}$ 2) $\cosh A = \frac{e^A + e^{-A}}{2}$

3) $\operatorname{tgh}A = \frac{e^A - e^{-A}}{e^A + e^{-A}}$ 4) $\operatorname{ctgh}A = \frac{e^A + e^{-A}}{e^A - e^{-A}}$

5) $\cosh^2 A - \operatorname{senh}^2 A = 1$ 6) $1 - \operatorname{tgh}^2 A = \operatorname{sech}^2 A$

7) $1 - \operatorname{ctgh}^2 A = -\operatorname{cosech}^2 A$ 8) $\cosh 2A = \cosh^2 A + \operatorname{senh}^2 A$

III. LOGARITMOS

$a^x = N,\ a > 0 \Leftrightarrow x = \log_a N$ $x = e^y \Leftrightarrow y = \log_e x = Lnx$

1) $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$ 2) $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

3) $\log_a A^n = n\ Log_a A$ 4) $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\log_a A$

5) $\log_b N = \log_b a.\log_a N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$ (cambio de base)

IV. SUMATORIAS

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ 2) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

3) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ 4) $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n}{30}(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$

5) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 6) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

V. ECUACIONES CUARTICAS

$x^4 + 2px^3 + qx^2 + 2rx + s = 0$, sumando $(ax + b)^2$

$x^4 + 2px^3 + qx^2 + 2rx + s + (ax + b)^2 = (ax + b)^2$

$x^4 + 2px^3 + (a^2 + q)x^2 + 2(r + ab)x + s + b^2 = (ax + b)^2$

$$(x^2 + px + k)^2 = (ax + b)^2$$

$x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2k)x^2 + 2pkx + k^2 = (ax + b)^2$

$$\begin{cases} p^2 + 2k = a^2 + q \\ 2pk = 2(r + ab) \\ k^2 = s + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2pk - 2r = 2ab \\ pk - r = ab \end{cases}$$

$$(pk - r)^2 = a^2b^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = p^2 + 2k - q \\ b^2 = k^2 - s \end{cases}$$

$(pk - r)^2 = a^2\ b^2 = (p^2 + 2kp - q)(k^2 - s)$

simplificando:

$2k^3 - qk^2 + (2pr - 2s)k - p^2 s - r^2 + qs = 0$

Hallando las raices de k se tiene: $(x^2 + px + k)^2 = (ax + b)^2$

$x^2 + px + k = \pm(ax + b)$ de donde

$$\begin{cases} x^2 + (p - a)x + k - b = 0 \\ x^2 + (p + a)x + k + b = 0 \end{cases}$$

VI. ECUACIONES CUBICAS

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ haciendo $x = y - p/3$

se transforma en $y^3 + (q - p^2/3)\,y + \dfrac{2p^3}{27} - \dfrac{qp}{3} + r = 0$

$$y^3 + Qy + R = 0$$

se hace $y = A + B$

donde $A^3 = -\dfrac{R}{2} + \sqrt{\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{Q^3}{27}}$, $B^3 = -\dfrac{R}{2} - \sqrt{\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{Q^3}{27}}$

VII. DERIVADAS ELEMENTALES

1) $y = f(x) = c \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x) = 0$

2) $y = kf(x) = c \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = kf'(x)$

3) $y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x) \pm g(x)$

4) $y = f(x) = x^n \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x) = nx^{n-1}$

5) $y = f(x).g(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

6) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}$

7) $y = (f(x))^n \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = n(f(x))^{n-1}.f'(x)$

VIII. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y SUS INVERSAS

1) $y = \operatorname{sen}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \cos f(x).f'(x)$

2) $y = \cos(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(f(x)).f'(x)$

3) $y = \operatorname{tg}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \sec^2(f(x)).f'(x)$

4) $y = c\operatorname{tg}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2(f(x)).f'(x)$

5) $y = \sec(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \sec(f(x)).\operatorname{tg}(f(x)).f'(x)$

6) $y = \operatorname{cosec}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}(f(x)).c\operatorname{tg}(f(x)).f'(x)$

7) $y = arc.\operatorname{sen}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$

8) $y = arc.\cos(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$

9) $y = arc.\operatorname{tg}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

10) $y = arc.c\operatorname{tg}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f'(x)}{1+f^2(x)}$

11) $y = arc.\sec(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{|f(x)|\sqrt{f^2(x)-1}}$

12) $y = arc.\operatorname{cosec}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f'(x)}{|f(x)|\sqrt{f^2(x)-1}}$

IX. DERIVADA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

1) $y = \log_a(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log_a e}{f(x)}.f'(x), \quad a \neq 0,1$

2) $y = \ln(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

3) $y = a^{f(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = a^{f(x)}.Ln\ a.f'(x)$

4) $y = e^{f(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = e^{f(x)}.f'(x)$

5) $y = (f(x))^{g(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = g(x)(f(x))^{g(x)-1}.f'(x) + (f(x))^{g(x)}\ln(f(x)).g'(x)$

X. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS Y SUS INVERSAS

1) $y = \operatorname{senh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \cosh(f(x)).f'(x)$

2) $y = \cosh(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{senh}(f(x)).f'(x)$

3) $y = \operatorname{tgh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \sec h^2(f(x)).f'(x)$

4) $y = c\operatorname{tgh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech}^2(f(x)).f'(x)$

5) $y = \sec h(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\sec h(f(x)).\operatorname{tgh}(f(x)).f'(x)$

6) $y = \cos eh(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\cos ech(f(x)).c\,\mathrm{tgh}(f(x)).f'(x)$

7) $y = arc.\mathrm{senh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}$

8) $y = arc.\cosh(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\pm f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}$

9) $y = arc.\mathrm{tgh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{1-f^2(x)}, \quad - < \mathrm{f(x)} < 1$

10) $y = arc.c\,\mathrm{tgh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{1-f^2(x)}, \quad (\mathrm{f(x)}) > 1$

11) $y = arc.\sec h(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\pm f'(x)}{f(x)\sqrt{1-f^2(x)}}$

12) $y = arc.\cos ech(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f'(x)}{|f(x)|\sqrt{1+f^2(x)}}$

XI. TABLA DE INTEGRALES

1) $\int a\,dx = ax + c$

2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

3) $\int d(f(x)) = f(x) + c$

4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

5) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

6) $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

7) $\int \dfrac{du}{u} = Ln|u| + c$

8) $\int e^u du = e^u + c$

9) $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c, \quad a > 0, \ a \neq 1$

10) $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + c$

11) $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} Ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c$

12) $\int \dfrac{du}{a^2-u^2} = \dfrac{1}{2a} Ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + c$

13) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc.\mathrm{sen}(\dfrac{u}{a}) + c$

14) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = Ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$

15) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = Ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

16) $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \dfrac{a^2}{2} arc.\mathrm{sen}\dfrac{u}{a} + c$

17) $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \dfrac{a^2}{2} Ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

18) $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2} Ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$

19) $\int \mathrm{sen}\,u\,du = -\cos u + c$

20) $\int \cos u\,du = \mathrm{sen}\,u + c$

21) $\int \mathrm{tg}\,u\,du = -Ln|\cos u| + c$

22) $\int c\,\mathrm{tg}\,u\,du = Ln|\mathrm{sen}\,u| + c$

23) $\int \sec u\,du = Ln|\sec u + \mathrm{tg}\,u| + c$

24) $\int \mathrm{cosec}\,u\,du = Ln|\mathrm{cosec}\,u - c\,\mathrm{tg}\,u| + c$

25) $\int \sec^2 u\,du = \mathrm{tg}\,u + c$

26) $\int \mathrm{cosec}^2 u\,du = -c\,\mathrm{tg}\,u + c$

27) $\int \sec u\,\mathrm{tg}\,u\,du = \sec u + c$

28) $\int \mathrm{cosec}\,u.c\,\mathrm{tg}\,u\,du = -\mathrm{cosec}\,u + c$

29) $\int \mathrm{senh}\,u\,du = \cosh u + c$

30) $\int \cosh u\,du = \mathrm{senh}\,u + c$

31) $\int \mathrm{tgh}\,u\,du = Ln|\cosh u| + c$

32) $\int c\,\mathrm{tgh}\,u\,du = Ln|\sec hu| + c$

33) $\int \sec h^2 u\,du = \operatorname{tgh} u + c$ 34) $\int \operatorname{cosech}^2 u\,du = -\operatorname{ctgh} u + c$

35) $\int \sec hu.\operatorname{tgh} u\,du = -\sec hu + c$

36) $\int \operatorname{cosech} u.\operatorname{ctgh} u\,du = -\operatorname{cosech} u + c$

37) $\int e^{au}\operatorname{sen}(bu)du = e^{au}\dfrac{(a\operatorname{sen}(bu) - b\cos(bu))}{a^2+b^2} + c$

38) $\int e^{au}\cos(bu)du = e^{au}\dfrac{(a\cos bu + b\operatorname{sen}(bu))}{a^2+b^2} + c$

XII. NUMEROS COMPLEJOS

$z_1 = a + bi,\quad z_2 = c + di$ *números complejos*

1) $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$

2) $z_1.z_2 = (ac - bd) + (bc - ad)i$

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

XIII. FORMULA DE MOIVRE

i) $(a+bi)^n = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)$

ii) $\sqrt[n]{a+bi} = r^{1/n}\left[\cos\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$

BIBLIOGRAFIA

1) Matemáticas Superiores para Ingeniería
por: C.R. - WYLIE, JR.

2) Matemática Avanzada para Ingeniería. Volumen I
por: ERWIN KREYSZIG.

3) Ecuaciones Diferenciales
por: KREIDER - KULLER - OSTBERG.

4) Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
por: A. KISELIOV - M. KROSNOV - G. MAKARENKO.

5) Ecuaciones Diferenciales
por: DONALD - L. KREIDER.

6) Ecuaciones Diferenciales
por: RALPH PALMER AGNEV.

7) Ecuaciones Diferenciales Aplicadas
por: M.R. - SPIEGEL.

8) Ecuaciones Diferenciales Elementales
por: L.M. KELLS.

9) Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera
por: WILLIAN E. BOYCE - RICHARD C. PRIMA.

10) Matemáticas avanzadas para ingeniería
por: ERWIN KREYSZIG. Tomo II.

11) Ecuaciones Diferenciales
por: TAKAUCHI - RAMIREZ - RUIZ

12) Ecuaciones Diferenciales
por: KAJL . NIELSEN.

13) Ecuaciones Diferenciales
por: SHEPLEY L. ROSS.

14) Ecuaciones Diferenciales Elementales
por: EARL D. RAINVILLE.

15) Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones
por: WILLIAM R. DERAICA - STANLEY Y. GROSSMAN.

16) Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones
por: F. SINMONS.

17) Curso Elemental de Matemática Superior. Tomo V.
por: J. QUINET.

18) Ecuaciones Diferenciales
por: FRANK AYRES.

19) Introducción a las Ecuaciones Diferenciales
por: WILLIAN E. BOYCE y RICHARD C. DIPRIMA

20) Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional
por: L. EL SGOLTS.

21) Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
por: EARL Y. CODDINGTON.

22) Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático
por: G. BARANENKOV - B. DEMIDOVICH.

23) Ecuaciones Diferenciales
por: H. B. PHILLIPS.

24) Ecuaciones Diferenciales
por: HARRY W. REDDICK y DONALD E. KIBBEY.

25) Introducción al Análisis Lineal
por: KREIDER - KULLER - OSTBERG - PERKINS. Tomo II.

26) Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones
por: BETZ BURCHAM EWING.

27) Ejercicios y Problemas de Matemática Superior
por: P. DANKO y A. POPOV. Tomo II.

28) Matemática Superior en Ejercicios y Problemas
por: T. y A. KOZHE'VNIKOVA.

29) Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático
por: G.N. BERMAN.

30) Matemática para Administración y Economía
por: JEAN E. DRAPER, JANE S. KLINGMAN, JEAN WEBER

31) Matemática para Economistas
por: TARO YAMANE.

32) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
por: CARLOS IMOZ - ZOENEK VOREL

33) Matemática Superior para Matemáticos, Física e Ingenieros. Volumen II
por: R. ROTHE.

34) Análisis Matemático
por: PROTTER - MORREY

35) Análisis Matemático Volumen II
por: HAASER - LASALLE - SULLIVAN.

36) Calculus. Volumen II
por: TOM M. APOSTOL

37) Ecuaciones Diferenciales
por: F. MERCELLAN, L. CASASIAS, A. ZARZO

38) Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones
por: DENNIS G. ZILL

39) Matemáticas Avanzadas para Ingeniería
por: PETER V. O'NEIL

40) Ecuaciones Diferenciales
por: C. H. EDWARDS, JR. DAVID E. PENNEY

14) Ecuaciones Diferenciales Elementales
por: EARL D. RAINVILLE.

15) Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones
por: WILLIAM R. DERAICA

16) Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones
por: F. SINMONS.

17) Curso Elemental de Matemática Superior. Tomo V.
por: J. QUINET.

18) Ecuaciones Diferenciales
por:

19) Introducción a las Ecuaciones Diferenciales
por: WILLIAN E. BOYCE y RICHARD C. DIPRIMA

20) Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional
por: L. EL SGO

21) Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
por: EARL Y. CODDINGTON.

22) Problemas y Ejercicios de Análisis
por: G. BARANENKOV - B. DEMIDOVICH.

23) Ecuaciones Diferenciales
por: H. B. PHILLIPS.

24) Ecuaciones Diferenciales
por: HARRY W. REDDICK y DONALD E.

25) Introducción al Análisis Lineal
por: KREIDER - KULLER - OSTBERG - PERKINS.

26) Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones
por: BETZ BURCHAM EWING.

27) Ejercicios y Problemas de Matemática Superior
por: P. DANKO y A. POPOV. Tomo II.

28) Matemática Superior en Ejercicios y Problemas
por: T. y A. KOZHE'VNIKOVA.

OBRAS DEL AUTOR

- Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones
- Análisis Matemático I para estudiantes de Ciencia e Ingeniería
- Análisis Matemático II para estudiantes de Ciencia e Ingeniería
- Análisis Matemático III para estudiantes de Ciencia e Ingeniería
- Transformada de Laplace
- Sucesiones y Series Infinitas
- Geometría Analítica
- Funciones Vectoriales de Variable Real
- Funciones de Varias Variables
- Integrales Curvilíneas y Múltiples
- Vectores y sus aplicaciones
- Rectas - Planos y Superficies
- Matrices y Determinantes
- Números Complejos y Polinomios
- Solucionario de Makarenko (Ecuaciones Diferenciales)
- Solucionario de Leithold 2da. Parte
- Solucionario de Análisis Matemático III de G. Berman
- Solucionario de Análisis Matemático I por Deminovich
- Solucionario de Análisis Matemático II por Deminovich
- Solucionario de Análisis Matemático III por Deminovich
- Solucionario de Matemática para Administración y Economía por Weber